CONCOURS GÉNÉRAL 1990
Exercice III
Corrigé détaillé

Samuel Rochetin

Jeudi 29 décembre 2016

Résumé

Cet exercice, excellent pour développer l'esprit d'initiative en arithmétique, consiste à étudier les cas d'existence de solutions d'une équation diophantienne. Signalons que la résolution de la deuxième question repose sur une utilisation ingénieuse du résultat de la première.

1. Soit (a,b,c) une solution de l'équation $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{4}$. Si l'un des entiers a,b,c vaut 1, alors $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>\frac{1}{4}$, donc les trois entiers a,b,c sont supérieurs ou égaux à 2. Si $a=2$, alors $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=0$, donc $\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}=0$. Contradiction. Notons que nous avons utilisé le fait suivant : une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun de ces réels est nul. Par symétrie du problème, les trois entiers naturels a,b,c sont donc supérieurs ou égaux à 3. Si $a\geq 4, b\geq 4$ et $c\geq 4$, alors $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leq\frac{3}{16}<\frac{1}{4}$, donc l'un au moins des entiers a,b,c vaut 3. Supposons que $a=3$. Alors $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{5}{36}$. Si $b\geq 4$ et $c\geq 4$, alors $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leq\frac{1}{8}<\frac{5}{36}$, donc l'un au moins des entiers b,c vaut 3. Supposons que $b=3$. Alors $\frac{1}{c^2}=\frac{1}{36}$, donc $c=6$. $\boxed{\text{L'unique solution de l'équation } \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{4}\text{, à permutation près, est donc } (a,b,c)=(3,3,6).}$

2. Pour tout entier naturel $n\geq 1$, notons (E_n) l'équation $\frac{1}{x_1^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}=1$. Si $n=1$, alors (E_1) admet $x_1=1$ comme solution. Considérons $n\geq 2$. S'il existe un entier de $\{x_1,\ldots,x_n\}$ égal à 1, alors $\frac{1}{x_1^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}>1$, donc si $(x_1,\ldots,x_n)$ est solution de (E_n), alors tout entier de $\{x_1,\ldots,x_n\}$ est supérieur ou égal à 2. Donc si $n=2$, alors $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}<1$, donc (E_2) n'admet aucune solution. De même, si $n=3$, alors $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}<1$, donc (E_3) n'admet aucune solution. Si $n=4$, nous remarquons que $(2,2,2,2)$ est solution de (E_4). Nous pouvons en déduire que tous les entiers $n=2p$, avec $p\geq 2$, sont tels que l'équations (E_n) admette au moins une solution. Montrons ce résultat par récurrence sur p. Initialisation : pour $p=2$, nous venons de voir que $(2,2,2,2)$ est solution de (E_4). Hérédité : supposons qu'il existe un entier $p\geq 2$ tel que l'équation (E_{2p}) admette une solution $(x_1,\ldots,x_{2p})$. Montrons que dans ce cas, l'un au moins des entiers $x_1,\ldots,x_{2p}$ est pair. Supposons que tous les entiers $x_1,\ldots,x_{2p}$ soient impairs. En réduisant au même dénominateur, l'équation (E_{2p}) équivaut à $(x_1\ldots x_{2p})^2=(x_2\ldots x_{2p})^2+(x_1x_3\ldots x_{2p})^2+\cdots+(x_1\ldots x_{2p-1})^2$. Le membre de gauche de cette égalité est impair par hypothèse. Le membre de droite est une somme d'un nombre pair $(2p)$ de termes impairs, c'est donc un nombre pair. Contradiction. Donc l'un au moins des entiers $x_1,\ldots,x_{2p}$ est pair. Notons que nous avons utilisé le fait suivant : le carré d'un nombre impair est impair. Quitte à réindexer, supposons que x_{2p} est pair et s'écrive $x_{2p}=2y_{2p}$. En utilisant la question précédente, il vient $\frac{1}{x_{2p}^2}=\frac{1}{4y_{2p}^2}=\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}\right)\frac{1}{y_{2p}^2}=\frac{1}{(3y_{2p})^2}+\frac{1}{(3y_{2p})^2}+\frac{1}{(6y_{2p})^2}$, donc $(x_1,\ldots,x_{2p-1},3y_{2p},3y_{2p},6y_{2p})$ est solution de l'équation (E_{2p+2}), c'est-à-dire de $\left(E_{2(p+1)}\right)$, et l'hérédité est démontrée. Montrons que (E_5) n'admet aucune solution. Supposons que $(x_1,\ldots,x_5)$ soit solution de (E_5). Si tout élément de $\{x_1,\ldots,x_5\}$ est supérieur ou égal à 3, alors $\frac{1}{x_1^2}+\cdots+\frac{1}{x_5^2}\leq\frac{5}{9}<1$, donc l'un des éléments de $\{x_1,\ldots,x_5\}$ est égal à 2. Quitte à réindexer, supposons que $x_5=2$. Alors $(x_1,\ldots,x_4)$ est solution de $\frac{1}{x_1^2}+\cdots+\frac{1}{x_4^2}=\frac{3}{4}$. Si tout élément de $\{x_1,\ldots,x_4\}$ est supérieur ou égal à 3, alors $\frac{1}{x_1^2}+\cdots+\frac{1}{x_4^2}\leq\frac{4}{9}<\frac{3}{4}$, donc l'un des éléments de $\{x_1,\ldots,x_4\}$ est égal à 2. Quitte à réindexer, supposons que $x_4=2$. Alors (x_1,x_2,x_3) est solution de $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\frac{1}{2}$. Si tout élément de $\{x_1,x_2,x_3\}$ est supérieur ou égal à 3, alors $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}\leq\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$, donc l'un des éléments de $\{x_1,x_2,x_3\}$ est égal à 2. Quitte à réindexer, supposons que $x_3=2$. Alors (x_1,x_2) est solution de $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{1}{4}$. Si tout élé-

ment de $\{x_1, x_2\}$ est supérieur ou égal à 3, alors $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \leq \frac{2}{9} < \frac{1}{4}$, donc l'un des éléments de $\{x_1, x_2\}$ est égal à 2. Quitte à réindexer, supposons que $x_2 = 2$. Nous avons donc $\frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_4^2} = 1$, donc $\frac{1}{x_5^2} = 0$. Contradiction. Donc (E_5) n'admet aucune solution. Reproduisons le même raisonnement pour (E_7). Supposons que $(x_1, \ldots, x_7)$ soit solution de (E_7). Si tout élément de $\{x_1, \ldots, x_7\}$ est supérieur ou égal à 3, alors $\frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_7^2} \leq \frac{7}{9} < 1$, donc l'un des éléments de $\{x_1, \ldots, x_7\}$ est égal à 2. Quitte à réindexer, supposons que $x_7 = 2$. Alors $(x_1, \ldots, x_6)$ est solution de $\frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_6^2} = \frac{3}{4}$. Si tout élément de $\{x_1, \ldots, x_6\}$ est supérieur ou égal à 3, alors $\frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_6^2} \leq \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, donc l'un des éléments de $\{x_1, \ldots, x_6\}$ est égal à 2. Quitte à réindexer, supposons que $x_6 = 2$. Alors $(x_1, \ldots, x_5)$ est solution de $\frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_5^2} = \frac{1}{2}$. Cette équation équivaut à $2\left((x_2 \ldots x_5)^2 + (x_1x_3x_4x_5)^2 + \cdots + (x_1 \ldots x_4)^2\right) = (x_1 \ldots x_5)^2$, donc $(x_1 \ldots x_5)^2$ est pair, donc $x_1 \ldots x_5$ est pair, donc l'un des éléments de $\{x_1, \ldots, x_5\}$ est pair. Supposons que x_5 est pair et que $x_5 = 2$. Alors $(x_1, \ldots, x_4)$ est solution de $\frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_4^2} = \frac{1}{4}$. Une solution évidente de cette équation est $(4, 4, 4, 4)$. Nous vérifions ensuite que $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 4)$ est solution de (E_7). Nous pouvons en déduire que tous les entiers $n = 2p + 1$, avec $p \geq 3$, sont tels que l'équations (E_n) admette au moins une solution. Montrons ce résultat par récurrence sur p en considérant la propriété $\mathscr{P}_p$ suivante : « l'équation (E_{2p+1}) admet au moins une solution $(x_1, \ldots, x_{2p+1})$, et au moins un élément de $\{x_1, \ldots, x_{2p+1}\}$ est pair ». Initialisation : pour $p = 3$, nous venons de voir que $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 4)$ est solution de (E_7), et $\{2, 2, 2, 4, 4, 4, 4\}$ contient au moins un entier pair. Hérédité : supposons qu'il existe un entier $p \geq 3$ tel que la propriété $\mathscr{P}_p$ soit vraie. Soit $(x_1, \ldots, x_{2p+1})$ une solution de (E_{2p+1}). Quitte à réindexer, supposons que x_{2p+1} est pair et s'écrive $x_{2p+1} = 2y_{2p+1}$. En utilisant la question précédente, il vient $\frac{1}{x_{2p+1}^2} = \frac{1}{4y_{2p+1}^2} = \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2}\right)\frac{1}{y_{2p+1}^2} = \frac{1}{(3y_{2p+1})^2} + \frac{1}{(3y_{2p+1})^2} + \frac{1}{(6y_{2p+1})^2}$, donc $(x_1, \ldots, x_{2p}, 3y_{2p+1}, 3y_{2p+1}, 6y_{2p+1})$ est solution de l'équation (E_{2p+3}), c'est-à-dire de $\left(E_{2(p+1)+1}\right)$, avec $6y_{2p+1}$ pair, donc la propriété $\mathscr{P}_{p+1}$ est vraie et l'hérédité est démontrée. Au final, $\boxed{\text{les entiers } n \text{ tels que } (E_n) \text{ admette une solution sont 1, 4 et tous les entiers supérieurs ou égaux à 6.}}$