CONCOURS GÉNÉRAL 1992
Exercice V
Corrigé détaillé

Samuel Rochetin

Mercredi 30 juillet 2008

Énoncé

Quel est le chiffre des unités du plus grand nombre entier inférieur ou égal à $\frac{10^{1992}}{10^{83}+7}$?

Une solution

Posons $A = \frac{10^{1992}}{10^{83}+7}$.

On remarque que $10^{1992} = \left(10^{83}\right)^{24}$. On pense alors à la formule $\frac{a^n-b^n}{a-b} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$; si on remplace (a,b) par (a^2,b^2), on a $\frac{(a^2)^n-(b^2)^n}{a+b} = (a-b)\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{2k}b^{2(n-1-k)}$. Appliquée à $(a,b,n) = (10^{83},7,12)$, cette dernière donne donc : $A = \frac{7^{24}}{10^{83}+7} + (10^{83}-7)\sum\limits_{k=0}^{11} \left(10^{83}\right)^{2k} 7^{2(11-k)}$.

$\frac{7^{24}}{10^{83}+7} \leq \frac{7^{24}}{10^{83}} \leq \frac{10^{24}}{10^{83}} = 10^{-59}$ donc le terme $\frac{7^{24}}{10^{83}+7}$ n'intervient pas dans la réponse à la question posée.

Le terme restant est obtenu par des opérations arithmétiques élémentaires sauf la division sur des entiers, c'est donc un entier. Par ailleurs, $(10^{83}-7)\sum\limits_{k=0}^{11} \left(10^{83}\right)^{2k} 7^{2(11-k)} = (10^{83}-7)7^{22} + (10^{83}-7)\sum\limits_{k=1}^{11} \left(10^{83}\right)^{2k} 7^{2(11-k)}$. Étant donné qu'au moins les $83*2*1 = 166$ premiers chiffres en partant de l'unité du nombre $(10^{83}-7)\sum\limits_{k=1}^{11} \left(10^{83}\right)^{2k} 7^{2(11-k)}$ sont des 0, on s'intéresse au nombre $(10^{83}-7)7^{22}$.

On remarque que le chiffre des unités de 7^4 est 1 (car le celui de 7^2 est 9). Celui de $7^{20} = \left(7^4\right)^5$ est donc 1 également. Au final, le chiffre des unités de $7^{22} = \left(7^4\right)^5 7^2$ est celui de 7^2, c'est-à-dire 9. Comme celui de $(10^{83}-7)$ est 3, celui de $(10^{83}-7)7^{22}$ est aussi celui de $3*9 = 27$, c'est donc 7.

Au final, $\boxed{\text{le chiffre des unités du plus grand nombre entier inférieur ou égal à } \frac{10^{1992}}{10^{83}+7} \text{ est } 7}$.