

# CONCOURS GENERAL 1992

## Exercice I

On dit qu'une partie non vide  $\Delta$  du plan  $\mathcal{P}$  est convexe si elle possède la propriété suivante :

Pour tout couple  $(M, N)$  de points de  $\Delta$ , le segment  $[MN]$  est contenu dans  $\Delta$

Soit  $\Delta$  une partie convexe du plan  $\mathcal{P}$ . Si  $A$  est un point de  $\mathcal{P}$ , à tout couple  $(M, N)$  de points de  $\Delta$  on associe le point  $m$  défini par

$$\overline{Am} = \frac{1}{2} \overline{MN}$$

et on note  $\delta_A(\Delta)$  l'ensemble des points  $m$  ainsi obtenus.

- Montrer que  $\delta_A(\Delta)$  admet un centre de symétrie.
  - A quelle condition a-t-on  $\delta_A(\Delta) = \Delta$  ?
  - Soient  $B$  et  $C$  deux points du plan  $\mathcal{P}$ . Par quelle transformation passe-t-on de  $\delta_B(\Delta)$  à  $\delta_C(\Delta)$  ?
- Soit  $A$  un point du plan  $\mathcal{P}$ . Déterminer et représenter  $\delta_A(\Delta)$  lorsque :
  - $\Delta$  est une bande du plan  $\mathcal{P}$  délimitée par deux droites parallèles.
  - $\Delta$  est délimitée par un triangle.
  - $\Delta$  est un demi-disque.
- Montrer que dans les deux cas 2.b) et 2.c), les contours de  $\Delta$  et  $\delta_A(\Delta)$  ont la même longueur.

## Exercice II

Soit  $(\mathcal{C})$  un cercle du plan de rayon 1.

- Déterminer les triangles  $ABC$  inscrits dans le cercle  $(\mathcal{C})$  pour lesquels la somme

$$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

est maximale.

- Déterminer les quadrilatères  $ABCD$  inscrits dans le cercle  $(\mathcal{C})$  pour lesquels la somme

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$$

est maximale. Représenter un tel quadrilatère.

## Exercice III

Soit  $ABCD$  un tétraèdre inscrit dans une sphère de centre  $O$ . On note  $G$  l'isobarycentre des quatre sommets du tétraèdre et  $I$  le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- Les deux points  $O$  et  $G$  sont confondus.
- Les quatre faces du tétraèdre sont isométriques.
- Les deux points  $O$  et  $I$  sont confondus.

## Exercice IV

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par la donnée de ses deux premiers termes  $u_0$  et  $u_1$ ,  $0 < u_0 < 1$  et  $0 < u_1 < 1$ , et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n})$$

- Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
- Montrer qu'à partir d'un certain rang  $n_0$ , la suite  $(u_n)$  est monotone ( on ne demande pas de déterminer  $n_0$  qui dépend des valeurs initiales  $u_0$  et  $u_1$ . )

## Exercice V

Quel est le chiffre des unités du plus grand nombre entier inférieur ou égal à  $\frac{10^{1992}}{1083 + 7}$  ?