CONCOURS GÉNÉRAL 2016
Problème I
Corrigé détaillé

Samuel Rochetin

Lundi 19 décembre 2016

Résumé

Ce problème permet d'obtenir un résultat substantiel de théorie élémentaire des nombres : tout entier suffisamment grand peut se décomposer en une somme de cubes d'entiers strictement positifs deux à deux distincts. C'est un problème difficile car la dépendance des questions n'est pas évidente et certaines questions requièrent une grande créativité.

1° En écrivant la liste des cubes inférieurs à 2016, nous remarquons que $2016 = 2^3 + 4^3 + 6^3 + 12^3$. Donc $\boxed{2016 \in S_0.}$

2° (a) Posons $f : x \mapsto 2(2x-1)^3 - (2x+1)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 6x - 3$ et montrons que pour tout réel $x \geq 5, f(x) \geq 0$. Une étude de fonction classique montre que f est croissante sur $\left[\dfrac{2\sqrt{2}+3}{2}, +\infty\right[$. Or, $\dfrac{2\sqrt{2}+3}{2} \leq 5$, donc pour tout réel $x \geq 5, f(x) \geq f(5) = 127 \geq 0$. Donc $\boxed{\text{pour tout réel } x \geq 5, (2x+1)^3 \leq 2(2x-1)^3.}$

Remarque : $f(4) = -43 < 0$. L'entier 5 est donc le plus petit entier k tel que l'inégalité soit vérifiée pour tout entier supérieur ou égal à k.

(b) Montrons le résultat par récurrence sur p. Initialisation : si $p = k$, il suffit d'appliquer l'inégalité de la question précédente en $x = k$. Hérédité : supposons qu'il existe un entier $p \geq k$ tel que l'inégalité soit vraie. En développant, en posant $f(p) := 6(2p+1)^2 + 12(2p+1) + 8$ puis en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous avons $(2(p+1)+1)^3 = ((2p+1)+2)^3 = (2p+1)^3 + f(p) \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p}(2j-1)^3 + f(p)$. Il suffit donc de montrer que $f(p) \leq (2(p+1)-1)^3 = (2p+1)^3$. Posons $g(p) := (2p+1)^3 - f(p)$ et montrons que $g(p) \geq 0$. En faisant apparaître une identité remarquable puis en exprimant g en fonction de $2p-1$, nous avons $g(p) = (2p+1)^3 - 6(2p+1)^2 - 12(2p+1) - 8 = (2p+1)^3 - 6(2p+1)^2 + 12(2p+1) - 8 - 24(2p+1) = ((2p+1)-2)^3 - 24(2p+1) = (2p-1)^3 - 24(2p-1+2) = (2p-1)^3 - 24(2p-1) - 48$. Posons $x := 2p-1$ et $h : x \mapsto x^3 - 24x - 48$. Une étude de fonction classique montre que h est croissante sur $\left[\sqrt{8}, +\infty\right[$. Or, $p \geq 5$ si et seulement si $x \geq 2 \times 5 - 1 = 9$, et $\sqrt{8} \leq 9$. Donc pour tout réel $x \geq 9, h(x) \geq h(9) = 465 \geq 0$. Ainsi, $(2(p+1)+1)^3 \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p}(2j-1)^3 + (2(p+1)-1)^3 = (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p+1}(2j-1)^3$, et l'hérédité est démontrée.

3° Examinons les résidus modulo 288 de $(2p+1)^3$ pour quelques valeurs successives de $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 1^3 &\equiv 1 \pmod{288} \\ 3^3 &\equiv 27 \pmod{288} \\ 5^3 &\equiv 125 \pmod{288} \\ 7^3 &\equiv 55 \pmod{288} \\ 9^3 &\equiv 153 \pmod{288} \\ 11^3 &\equiv 179 \pmod{288} \end{aligned}$$

Il est naturel de se demander si la suite des résidus est périodique. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p > q$ et $(2p+1)^3 \equiv (2q+1)^3 \pmod{288}$. Nous avons $288 = 2^5 3^2$ divise $(2p+1)^3 - (2q+1)^3 = 2(p-q)\left((2p+1)^2 + (2p+1)(2q+1) + (2q+1)^2\right)$. Or, l'entier $(2p+1)^2 + (2p+1)(2q+1) + (2q+1)^2$ est impair comme somme de trois entiers impairs, donc premier avec 2^5, donc d'après le théorème de Gauss, 2^5 divise $2(p-q)$, donc $2^4 = 16$ divise $p-q$, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p - q = 16k$, donc $2p+1 = 2q+1+32k$. Réciproquement, soit $(p,q,k) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $p > q$ et $2p+1 = 2q+1+32k$. Avons-nous nécessairement $(2p+1)^3 \equiv (2q+1)^3 \pmod{288}$? Non. Contre-exemple : pour $(p,q,k) = (16,0,1)$, nous avons $33^3 \equiv 225 \not\equiv 1 \equiv 1^3 \pmod{288}$, donc 32 n'est pas une période de la suite des résidus. Cherchons de nouvelles informations sur k. L'égalité $p - q = 16k$ mène à $(2p+1)^3 - (2q+1)^3 = 3(2q+1)^2 32k + 3(2q+1)(32k)^2 + (32k)^3$. Nous avons $288 = 2^5 3^2 = 32 \times 3^2$ divise $(2p+1)^3 - (2q+1)^3$ donc 3 divise $3(2q+1)^2 k + 3(2q+1)32k^2 + 32^2k^3$, donc 3 divise 32^2k^3. Or, 3 est premier avec 32^2, donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise k^3. Or, 3 est premier, donc 3 divise k, donc il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $p - q = 16 \times 3k' = 48k'$, donc $2p+1 = 2q+1+96k'$. Réciproquement, soit $(p,q,k') \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$

tel que $p > q$ et $2p+1 = 2q+1+96k'$. Il vient $(2p+1)^3 = (2q+1)^3 + 288\left((2q+1)^2k' + 96(2q+1)k'^2 + 3072k'^3\right)$, donc $(2p+1)^3 \equiv (2q+1)^3 \pmod{288}$. Nous avons donc déterminé une période de la suite des résidus : 96. En particulier, $1 \equiv 1^3 \equiv 97^3 \equiv 193^3 \equiv \dots \pmod{288}$. Posons, pour tout $i \in \{1,\dots,288\}, s_i := \sum_{k=0}^{i-1}(1+96k)^3$. Par construction, $\boxed{\text{pour tout } i \in \{1,\dots,288\}, s_i \in S_1 \text{ et } s_i \equiv i \pmod{288}.}$

4° Commençons par examiner les bornes de l'intervalle $[m+u_1, 288n+u_1]$. Par définition de m, la borne inférieure $m+u_1$ est écrite sous la forme cherchée. Par définition de s_{288}, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $s_{288} = 288k$. Donc $288n + u_1 = s_{288} + u_1 + (n-k)288$. Or, par définition de m, nous avons $288k = s_{288} \leq m \leq 288n$ donc $n-k \geq 0$. Par ailleurs, $k > 0$ donc $n-k+1 \leq n$. Au final, $1 \leq n-k+1 \leq n$, donc $288n+u_1 = s_{288} + u_{n-k+1}$ et la borne supérieure $288n+u_1$ peut s'écrire sous la forme cherchée. Cela nous donne l'idée d'une démonstration dans le cas général. Soit x un entier de l'intervalle $[m+u_1, 288n+u_1]$. Écrivons $x = t+u_1$, où t est un entier de l'intervalle $[m, 288n]$. Soit $i \in \{1,\dots,288\}$ tel que $t \equiv i \pmod{288}$. Nous avons donc $t \equiv s_i \pmod{288}$. Par définition de m et t, nous avons $s_i \leq m \leq t$ donc il existe $j-1 \in \mathbb{N}$ tel que $t = s_i + 288(j-1)$ donc $x = s_i + u_1 + 288(j-1)$. Or, $s_i + 288(j-1) = t \leq 288n$ et $s_i > 0$ donc $j \leq n$. Au final, $1 \leq j \leq n$, donc $\boxed{x = s_i + u_j.}$

5° (a) Nous remarquons que $288 = 2^3+4^3+6^3$ et $576 = 4^3+8^3$. En posant $u = 10^3$, nous avons $u+288 = 2^3+4^3+6^3+10^3$ et $u+576 = 4^3+8^3+10^3$, donc $\boxed{u, u+288 \text{ et } u+576 \text{ appartiennent à } S_0.}$

Remarque : il existe une infinité d'entiers répondant à la question. Il suffit en effet de construire une somme de cubes d'entiers pairs strictement positifs deux à deux distincts en ne choisissant aucun des entiers 2, 4, 6, 8. Une telle somme est donc supérieure ou égale à 10^3. L'entier $u = 10^3$ proposé ici est donc minimal.

(b) Montrons le résultat par récurrence sur n. Initialisation : la question précédente traite le cas $n = 3$ donc également le cas $n = 2$. Hérédité : supposons qu'il existe $n \geq 2$ éléments $u_1,\dots,u_n$ dans S_0 en progression arithmétique de raison 288. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, décomposons u_i en une somme de cubes d'entiers pairs strictement positifs deux à deux distincts. Notons $2w-2$, où $w \geq 2$, le plus grand de ces entiers pairs strictement positifs apparaissant au cube parmi ces n décompositions. Posons, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}, v_i := u_i + (2w+10)^3 + (2w+8)^3 + (2w)^3$ et $v_{n+1} := u_n + (2w+12)^3 + (2w+4)^3 + (2w+2)^3$. Nous avons $2w-2 < 2w < 2w+2 < \dots < 2w+12$ donc pour tout $i \in \{1,\dots,n+1\}, v_i \in S_0$. Par hypothèse de récurrence, pour tout $i \in \{1,\dots,n-1\}, v_{i+1} - v_i = u_{i+1} - u_i = 288$. Enfin, $v_{n+1} - v_n = (2w+12)^3 + (2w+4)^3 + (2w+2)^3 - (2w+10)^3 - (2w+8)^3 - (2w)^3 = 288$ d'après la relation admise dans l'énoncé, et l'hérédité est démontrée.

6° (a) m et k sont fixés donc nous pouvons choisir un entier naturel n tel que $288n \geq m + 2(2k-1)^3$. Sachant que $k \geq 5$ et $m > 0$, nous avons $n \geq \dfrac{m+2(2k-1)^3}{288} \geq \dfrac{1458}{288} \geq 2$, donc d'après la question précédente, il existe n éléments $u_1,\dots,u_n$ dans S_0 en progression arithmétique de raison 288. Donc d'après la question 4°, tout entier de l'intervalle $[m+u_1, 288n+u_1]$ peut s'écrire sous la forme cherchée. Or, par définition de n, nous avons $\left[m+u_1, m+u_1+2(2k-1)^3\right] \subset [m+u_1, 288n+u_1]$. Enfin, $m > 0$ et $u_1 > 0$ donc $m+u_1 \geq 1$, donc il suffit de poser $\boxed{N = m+u_1}$ pour avoir le résultat.

(b) Montrons par récurrence sur $p \geq k$ la propriété $\mathscr{P}_p$ suivante : « tout entier de l'intervalle $[N, N_p]$ peut se décomposer en une somme de cubes d'entiers strictement positifs deux à deux distincts, telle que le plus grand cube d'entier impair apparaissant dans cette décomposition soit strictement inférieur à $(2p+1)^3$ ». Initialisation : si $p = k$, d'après la question précédente, tout entier de l'intervalle $\left[N, N+2(2k-1)^3\right] = [N, N_k]$ peut s'écrire sous la forme $s_i + u$, avec $u \in S_0, s_i \in S_1$ et $s_i \leq m < (2k+1)^3$ par définition de m et k, donc le plus grand cube d'entier impair apparaissant dans cette décomposition est strictement inférieur à $(2k+1)^3$. Hérédité : supposons qu'il existe un entier $p \geq k$ tel que la propriété $\mathscr{P}_p$ soit vraie. Puisque $N_{p+1} = N_p + (2p+1)^3$, il suffit de s'intéresser aux entiers de l'intervalle $\left[N_p+1, N_p+(2p+1)^3\right]$, c'est-à-dire aux $N_p - i + (2p+1)^3$, où $i \in \left\{0,\dots,(2p+1)^3-1\right\}$. En utilisant l'inégalité de la question 2° (b), nous avons, pour tout $i \in \left\{0,\dots,(2p+1)^3-1\right\}, N_p \geq N_p - i \geq N_p - (2p+1)^3 \geq N_p - (2k-1)^3 - \sum_{j=k}^{p}(2j-1)^3 = N$, donc $N_p - i \in [N, N_p]$, donc par hypothèse de récurrence, $N_p - i$ peut s'écrire sous la forme $\alpha + \beta$, avec $\alpha \in S_0, \beta \in S_1$ et β pouvant se décomposer en une somme de cubes d'entiers impairs strictement positifs deux à deux distincts strictement inférieurs à $(2p+1)^3$. Ainsi, $\beta + (2p+1)^3 \in S_1$ donc $N_p - i + (2p+1)^3 = \alpha + \beta + (2p+1)^3 \in S$. Enfin, $p \geq 5$ donc $(2p+1)^3 < (2p+3)^3 = (2(p+1)+1)^3$, donc $\beta + (2p+1)^3$ peut se décomposer en une somme de cubes d'entiers impairs strictement positifs deux à deux distincts strictement inférieurs à $(2(p+1)+1)^3$, et l'hérédité est démontrée. L'entier p est arbitraire donc nous avons montré que $\boxed{\text{tout entier supérieur ou égal à } N \text{ appartient à } S.}$

Remarque : il pourrait être intéressant de déterminer la valeur minimale de N.