Olympiades académiques de Première

Samuel Rochetin

Mardi 10 décembre 2019

Exercice. *On définit, pour chaque couple de réels* (a, b)*, la fonction* f *par :* $f(x) = a - \sqrt{x+b}$*. Deux nombres réels* u *et* v *distincts sont dits échangeables s'il existe au moins un couple de réels* (a, b) *tel que la fonction* f *vérifie à la fois* $f(u) = v$ *et* $f(v) = u$*.*

1. *Montrer que* 2 *et* 3 *sont échangeables.*
2. *Peut-on en dire autant de* 4 *et* 7 *?*
3. *À quelle condition deux entiers* u *et* v *sont-ils échangeables ?*

Solution.

1. Il suffit de choisir $(a, b) = (3, -2)$.
2. Si $(u, v) = (4, 7)$ convient, alors par soustraction, $3 = \sqrt{7+b} - \sqrt{4+b}$. Donc, en élevant au carré, $b + 1 = \sqrt{b^2 + 11b + 28}$. Donc, en élevant au carré, $0 = 9b + 27$. Donc $b = -3$. Or, $3 \neq \sqrt{7-3} - \sqrt{4-3}$. Donc 4 et 7 ne sont pas échangeables.
3. Soient u, v deux entiers échangeables.

   Supposons, sans perte de généralité, que $u > v$.

   Alors en élevant $u - a$ et $v - a$ au carré, en soustrayant, en utilisant la troisième identité remarquable et en divisant par $u - v$ puisque u, v distincts, on a $u + v = 2a - 1$.

   Donc $2a$ est entier. Donc $2u - 2a$ et $2v - 2a$ sont entiers donc $2\sqrt{v+b}$ et $2\sqrt{u+b}$ sont entiers naturels, puisque positifs ou nuls.

   Par somme, en utilisant $u + v = 2a - 1$ et en multipliant par 2, on a $2 = 2\sqrt{v+b} + 2\sqrt{u+b}$.

   Or, 2 se décompose en somme de deux entiers naturels de trois façons : $2 = 2 + 0 = 1 + 1 = 0 + 2$.

   Si $2\sqrt{v+b} = 2$, alors $2\sqrt{u+b} = 0$ donc $v > u$, ce qui est impossible.

   Si $2\sqrt{v+b} = 2\sqrt{u+b}$, alors $u = v$, ce qui est impossible.

   Donc $2\sqrt{v+b} = 0$, c'est-à-dire $b = -v$. Donc $u = a$. Or, $u + v = 2a - 1$ donc $v = a - 1$ et $b = 1 - a$.

   Donc si u, v sont deux entiers échangeables, alors u, v sont consécutifs.

   Réciproquement, soient deux entiers consécutifs $u - 1, u$.

   En choisissant $(a, b) = (u, 1-u)$, on vérifie que $f(u) = u-1$ et $f(u-1) = u$.

   Deux entiers u, v sont échangeables si et seulement si u, v sont consécutifs.

□