Olympiades mathématiques de Fès 2006
Corrigé

Samuel Rochetin

Mercredi 30 novembre 2011

Exercice 1. *On admet que* $\exists a \in \mathbb{R}^*, a^3 + \frac{1}{a^3} = 18$. *Calculer* $a^4 + \frac{1}{a^4}$.

Solution. $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 + 3a + \frac{3}{a} + \frac{1}{a^3}$ donc $a + \frac{1}{a}$ est racine du polynôme $X^3 - 3X - 18$.

Or, 3 est racine évidente de $X^3 - 3X - 18$.

Donc en écrivant la division euclidienne de $X^3 - 3X - 18$ par $X - 3$ ou par identification, on obtient $X^3 - 3X - 18 = (X - 3)(X^2 + 3X + 6)$.

Or, $X^2 + 3X + 6$ est de discriminant négatif donc 3 est l'unique racine réelle de $X^3 - 3X - 18$.

Donc $a + \frac{1}{a} = 3$.

Or, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$ donc $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$.

Or, $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 = a^4 + \frac{1}{a^4} + 2$ donc $a^4 + \frac{1}{a^4} = 47$. $\square$

Exercice 2. *Soit* $(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$. *Montrer que* $xyz(x + y + z) = 1 \implies (x + y)(y + z) \geq 2$.

Solution. x, y, z sont les racines du polynôme $X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$, où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les fonctions symétriques élémentaires des racines.

Or, $\sigma_1 \sigma_3 = 1$.

Donc, pour $X = y$, on a $y^3 - \sigma_1 y^2 + \sigma_2 y - \frac{1}{\sigma_1} = 0$.

C'est-à-dire $\sigma_2 + y^2 = \sigma_1 y + \frac{1}{\sigma_1 y}$.

Or, en développant, $(x + y)(y + z) = \sigma_2 + y^2$.

Par ailleurs, une étude de fonction montre que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, t + \frac{1}{t} \geq 2$. $\square$

Exercice 3. *Soit* $ABCD$ *un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre* O *et dont les diagonales sont perpendiculaires. Montrer que les quadrilatères* $AOCB$ *et* $AOCD$ *ont la même aire.*

Démonstration. Soit r le rayon du cercle de centre O passant par A, B, C, D.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{AOB} &= \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin\left(\widehat{AOB}\right) \\
&= \frac{r^2}{2} \sin\left(2\widehat{ADB}\right) && \text{théorème de l'angle au centre}
\end{aligned}$$

De même, $\mathscr{A}_{COD} = \dfrac{r^2}{2} \sin\left(2\widehat{CAD}\right)$.

En utilisant la somme des angles d'un triangle et une propriété du sinus, on a $\widehat{ADB} + \widehat{CAD} = \dfrac{\pi}{2} \iff 2\widehat{CAD} = \pi - 2\widehat{ADB} \implies \sin\left(2\widehat{CAD}\right) = \sin\left(\pi - 2\widehat{ADB}\right) \iff \sin\left(2\widehat{CAD}\right) = \sin\left(2\widehat{ADB}\right)$.

Donc $\mathscr{A}_{AOB} = \mathscr{A}_{COD}$.

On montre de même que $\mathscr{A}_{BOC} = \mathscr{A}_{AOD}$.

Or, par additivité, $\mathscr{A}_{AOCB} = \mathscr{A}_{AOB} + \mathscr{A}_{BOC}$ et $\mathscr{A}_{AOCD} = \mathscr{A}_{COD} + \mathscr{A}_{AOD}$.

Donc $\mathscr{A}_{AOCB} = \mathscr{A}_{AOCD}$. □

Exercice 4. *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.*

Solution. Pour $(x, y) = (0, 0)$, l'équation donne $f(0)(f(0) - 1) = 0$.

Ceci est vrai si et seulement si $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Supposons que $f(0) = 0$.

Supposons que $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) \neq 0$.

Alors pour $(x, y) = (x_0, 0)$, l'équation donne $x_0 = 0$.

Donc $f(x_0) = f(0)$.

Donc $f(x_0) = 0$.

Contradiction.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

Réciproquement, on vérifie que la fonction identiquement nulle est solution.

Supposons que $f(0) = 1$.

Alors pour $y = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, l'équation donne $f(x) = x + 1$.

Réciproquement, on vérifie que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x+1)(y+1) - (xy+1) = x + y$.

Ainsi, l'équation fonctionnelle admet deux solutions : la fonction identiquement nulle et la fonction f définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$. □