Rallye Mathématique d'Alsace 1996
Classe de Première

Samuel Rochetin

Samedi 19 mars 2016

Exercice n°1

Énoncé. *On se donne trois réels* $a, b,$ *et* c *compris entre* 0 *et* 1*. Montrer l'inégalité :*

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\leq 2$$

Démonstration. Première solution : minorons les dénominateurs. $1 \geq a \iff bc \geq abc$ (en multipliant par $bc \geq 0$) $\iff 1+bc \geq 1+abc$. Le problème est invariant par permutation des lettres a, b, c, donc chaque dénominateur peut être minoré par $1+abc$. Nous obtenons donc $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\leq \frac{a+b+c}{1+abc}$. Il suffirait de prouver l'inégalité $\frac{a+b+c}{1+abc}\leq 2$, car nous aurions alors $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\leq \frac{a+b+c}{1+abc}\leq 2$ mais avant cela, il est impératif de vérifier que la majoration $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\leq \frac{a+b+c}{1+abc}$ n'est pas trop forte, car nous pourrions très bien avoir $2<\frac{a+b+c}{1+abc}$ pour certaines valeurs de a, b, c. Quelques cas particuliers, comme $a=b=c=1$ ou $a=0, b=\frac{1}{2}, c=1$ (le candidat sérieux prendra le temps d'en tester plusieurs afin de s'approprier le problème), parviennent à nous convaincre que nous devons bien prouver l'inégalité $\frac{a+b+c}{1+abc}\leq 2$.

1er cas : si $ab=0$, c'est-à-dire si l'un des réels a ou b est nul, par exemple a, alors $\frac{a+b+c}{1+abc}=b+c\leq 2$. De même si b est nul.

2nd cas : si $ab\neq 0$. Considérons la fonction $f : x\mapsto \frac{x+a+b}{abx+1}$. f est une fonction homographique définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{ab}\right\}$. Comme $-\frac{1}{ab}\notin[0;1]$, f est monotone sur $[0;1]$.

1er sous-cas : si f est décroissante, alors pour tout $x\in[0;1], f(x)\leq f(0)=a+b\leq 2$. En particulier, $f(c)=\frac{a+b+c}{1+abc}\leq 2$.

2nd sous-cas : si f est croissante, alors pour tout $x\in[0;1], f(x)\leq f(1)=\frac{a+b+1}{1+ab}$. En particulier, $f(c)=\frac{a+b+c}{1+abc}\leq\frac{a+b+1}{1+ab}$. Il suffit donc de montrer l'inégalité $\frac{a+b+1}{1+ab}\leq 2$. Quelques essais pour certaines valeurs de a, b parviennent à nous convaincre qu'elle est plausible.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a\leq 1\\ b\leq 1\end{cases} &\implies (a-1)(b-1)\geq 0\\
&\iff 1+ab-a-b\geq 0\\
&\iff a+b+1\leq 2+ab\\
&\implies a+b+1\leq 2+ab+ab \text{ car } ab\geq 0\\
&\iff \frac{a+b+1}{1+ab}\leq 2 \text{ en factorisant par 2 le membre de droite de l'inégalité précédente}
\end{aligned}$$

Deuxième solution : quitte à renommer les lettres, vue la symétrie du problème, nous pouvons supposer $a\leq b\leq c$. Il vient aisément que chaque dénominateur est minoré par $1+ab$. Comme $c\leq 1$, nous obtenons la majoration $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\leq\frac{a+b+1}{1+ab}$. La suite a été traitée ci-dessus.

Troisième solution : la fonction affine $x \mapsto \dfrac{x}{1+bc}$ est convexe et continue sur $[0;1]$. Les fonctions homographiques $x \mapsto \dfrac{b}{1+xc}$ et $x \mapsto \dfrac{c}{1+xb}$ sont convexes et continues sur $[0;1]$ car les coefficients b, c sont positifs. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+bc} + \dfrac{b}{1+xc} + \dfrac{c}{1+xb}$ est donc convexe et continue sur le compact $[0;1]$ comme somme de fonctions convexes et continues. Elle atteint donc son maximum en l'une des bornes de $[0;1]$, c'est-à-dire soit en $x = 0$, soit en $x = 1$. Par symétrie du problème, l'expression $\dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+ac} + \dfrac{c}{1+ab}$ est donc maximale en (au moins) l'un des triplets $(a, b, c) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, avec $\varepsilon_i = 0$ ou 1 pour $i = 1, 2, 3$. Toujours par symétrie du problème, il suffit d'examiner les triplets $(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)$. La valeur maximale prise par l'expression $\dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+ac} + \dfrac{c}{1+ab}$ est 2, atteinte pour le triplet $(0,1,1)$.

$\square$

Critique des solutions. *L'inégalité* $\dfrac{a+b+1}{1+ab} \leq 2$ *est cruciale, à tel point que le problème peut s'y ramener entièrement, comme le montre notre deuxième solution. Notre démonstration élémentaire de cette inégalité est à retenir. La simplicité des fonctions affines employées dans la solution officielle demeure intéressante. La dernière solution utilise des arguments qui ne figurent pas au programme de Première mais qui demeurent accessibles au candidat curieux. Nos deux dernières solutions à ce problème classique proviennent du livre Problem-Solving Strategies d'Arthur Engel, paru chez Springer. La traduction française de cet ouvrage incontournable est parue chez Cassini en deux volumes sous le titre Solutions d'expert.*