Rallye Mathématique d'Alsace 1996
Classe de Terminale

Samuel Rochetin

Samedi 19 mars 2016

Exercice n°1

Énoncé. *Proposer une méthode et l'appliquer pour déterminer, sans l'aide d'une calculatrice, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de* 97^{1996}.

Démonstration. Rappel : soit n un entier naturel. Le résidu de n modulo 10 est égal au chiffre des unités de n. Le résidu de n modulo 100 est égal au nombre formé par les deux derniers chiffres de n. Et ainsi de suite.

97 est proche de 100, ce qui facilite les calculs des congruences modulo 10 et 100.

$$97^{1996} \equiv (-3)^{1996} \equiv 3^{1996} \equiv (3^2)^{998} \equiv (-1)^{998} \equiv 1 \pmod{10}$$

Donc le chiffre des unités de 97^{1996} est 1. Autrement dit, le nombre formé par les deux derniers chiffres de 97^{1996} se termine par 1. Jusque là, il s'agit d'un exercice de cours de spécialité mathématiques en Terminale S.

Examinons ensuite les puissances successives de 3 modulo 10 jusqu'à obtenir 1 (pour un exposant non nul). C'est également une méthode de cours.

$$\begin{aligned}
3^0 &\equiv 1 \pmod{10}\\
3^1 &\equiv 3 \pmod{10}\\
3^2 &\equiv 9 \pmod{10}\\
3^3 &\equiv 7 \pmod{10}\\
3^4 &\equiv 1 \pmod{10}
\end{aligned}$$

La périodicité observée permet de conclure que le nombre 3^k se termine par 1 si, et seulement si, k est un multiple de 4. La démonstration rigoureuse de ce fait, laissée au lecteur, est encore un exercice de cours classique en spécialité mathématiques.

Nous pouvons aussi tenter d'examiner les puissances successives de 3 modulo 100 jusqu'à obtenir 1 (pour un exposant non nul). Bien entendu, sans calculatrice, il faut être ingénieux : par exemple, nous ne calculons pas 3^8 directement, mais nous pouvons écrire $3^8 \equiv 3^2 \times 3^6 \equiv 9 \times 29 \pmod{100}$.

$$\begin{aligned}
3^0 &\equiv 1 \pmod{100}\\
3^1 &\equiv 3 \pmod{100}\\
3^2 &\equiv 9 \pmod{100}\\
3^3 &\equiv 27 \pmod{100}\\
3^4 &\equiv 81 \pmod{100}\\
3^5 &\equiv 43 \pmod{100}\\
3^6 &\equiv 29 \pmod{100}\\
3^7 &\equiv 87 \pmod{100}\\
3^8 &\equiv 61 \pmod{100}
\end{aligned}$$

Le chemin pour obtenir 1 semble incertain. Cependant, nous savons que le nombre 3^k se termine par 1 si, et seulement si, k est un multiple de 4. Nous allons donc concentrer nos efforts sur les exposants multiples de 4.

$$\begin{aligned}
3^0 &\equiv 1 \pmod{100}\\
3^4 &\equiv 81 \pmod{100}\\
3^8 &\equiv 61 \pmod{100}\\
3^{12} &\equiv 41 \pmod{100}\\
3^{16} &\equiv 21 \pmod{100}\\
3^{20} &\equiv 1 \pmod{100}
\end{aligned}$$

Appliquons une dernière méthode de cours. La division euclidienne de 1996 par 20 s'écrit $1996 = 20 \times 99 + 16$, donc :

$$97^{1996} \equiv 3^{20\times 99+16} \equiv (3^{20})^{99} \times 3^{16} \equiv 1^{99} \times 21 \equiv 21 \pmod{100}$$

$\boxed{\text{Les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de } 97^{1996} \text{ forment donc le nombre 21.}}$ □

Critique de la solution. *L'arithmétique n'a fait son grand retour dans les programmes de spécialité mathématiques en Terminale S qu'au début des années 2000, voilà pourquoi la solution officielle de 1996 n'utilise pas les congruences. La solution présentée ici a l'avantage d'être très proche du cours.*

Exercice n°2

Énoncé. *On fixe deux réels strictement positifs a et b. Montrer que si a et b sont inférieurs ou égaux à 2, alors $a^a + b^b > ab$. Qu'en est-il dans les autres cas ?*

Démonstration. Rappel : pour tous réels a, b nous avons l'inégalité $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$. Cette inégalité classique doit être connue du candidat sérieux. Sa preuve est simple : $(a-b)^2 \geq 0 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff \dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$.

Analyse du problème : les exposants étant réels, le problème ne peut être abordé qu'à partir de la Terminale, à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme népérien. Un raisonnement purement élémentaire ne peut donc suffire à prouver cette inégalité et nous nous doutons que de l'analyse se cache derrière. De prime abord, il est impossible de comprendre pourquoi la valeur 2 semble importante. Un premier réflexe consiste à particulariser l'inégalité : supposons que l'inégalité soit vérifiée, alors pour $a = b$, elle devient $a^a + a^a > a \times a$, c'est-à-dire $a^a > \dfrac{a^2}{2}$.

Si nous parvenions à obtenir l'inégalité $x^x > \dfrac{x^2}{2}$ pour tout réel $x \in \,]0;2]$, alors pour tous réels $a, b \in \,]0;2]$, nous aurions $a^a + b^b > \dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ d'après le rappel. Or, $x^x > \dfrac{x^2}{2} \iff x^2\left(x^{x-2} - \dfrac{1}{2}\right) > 0 \iff x^{x-2} > \dfrac{1}{2} \iff (x-2)\ln(x) + \ln(2) > 0$, par croissance de la fonction logarithme népérien. Il suffit donc d'étudier le signe de la fonction $f : x \mapsto (x-2)\ln(x) + \ln(2)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est une méthode de cours. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel $\alpha \in \,]1;2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$, d'où le tableau de variations de f :

x	0	1	α	2	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$\|\|$		$+$		
variations de f'	$\|\|$ $-\infty$ ↗	-1 ↗	0 ↗	$\ln 2$ ↗	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
variations de f	$\|\|$ $+\infty$ ↘	$\ln 2$ ↘	$f(\alpha)$ ↗	$\ln 2$ ↗	$+\infty$

Nous comprenons désormais l'importance de la valeur 2. À partir de 2, l'inégalité $x^x > \dfrac{x^2}{2}$ est vérifiée car $f(x) \geq \ln 2 > 0$. Cependant, entre 1 et 2, le signe de $f(x)$ est incertain car il dépend du signe de $f(\alpha) = (\alpha - 2)\ln\alpha + \ln 2$. Or, $\ln 2 > \ln\alpha$, donc il vient $f(\alpha) > (\alpha - 1)\ln\alpha$.

L'étude de la fonction $g : x \mapsto (x-1)\ln x$ est plus simple que celle de la fonction f et mène au tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
signe de $g''(x)$	$\Vert$		$+$		
variations de g'	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de g	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

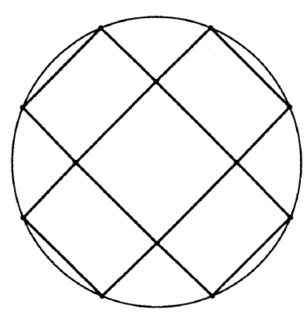
Nous en déduisons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq f(\alpha) > g(\alpha) \geq 0$, donc $x^x > \dfrac{x^2}{2}$.

$\boxed{\text{L'inégalité } a^a + b^b > ab \text{ est donc vraie quels que soient les réels strictement positifs } a \text{ et } b.}$ □

Critique de la solution. *Comme dans tout problème d'analyse consistant à prouver une inégalité, il est très facile de s'égarer en suivant des fausses pistes. Le point subtil de la preuve présentée ici consiste à trouver la minoration de $f(\alpha)$ par $(\alpha-1)\ln\alpha$. Montrer que $(x-1)\ln x$ est positif revient à comparer x^x et x comme dans la preuve officielle. Mais quel lycéen aurait l'idée d'attaquer ce problème spontanément par la comparaison de x^x et x ?! La preuve présentée ici peut sembler plus technique, mais elle a le mérite d'être proche du cours et d'éviter une disjonction de cas.*

Exercice n°3

Énoncé. *On désire placer 4 sets rectangulaires identiques sur une table ronde de rayon R. Ils ne peuvent ni se chevaucher, ni dépasser de la table. Ils sont disposés comme indiqué sur la figure. On veut que ces sets soient d'aire maximale. Quelles doivent être leurs dimensions ?*



Démonstration. Soient $L, l, \mathscr{A}$ respectivement la longueur, la largeur et l'aire d'un set. Le théorème du triangle rectangle inscrit dans un cercle appliqué à un coin de set touchant le bord de la table permet d'écrire la relation de Pythagore :

$$(2R)^2 = L^2 + (2l + L)^2$$

En développant puis en divisant par $4\mathscr{A} = 4Ll$, il vient :

$$\frac{R^2}{\mathscr{A}} = \frac{1}{2}\frac{L}{l} + \frac{l}{L} + 1$$

Posons $x = \dfrac{L}{l}$. Nous avons $x \geq 1$ car $L \geq l$, et $\dfrac{R^2}{\mathscr{A}(x)} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{x} + 1$. L'étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{x} + 1$ sur $[1; +\infty[$ donne le tableau de variations suivant :

x	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	$1+\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{R^2}{\mathscr{A}(x)}$ atteint son minimum $1+\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$, donc la fonction $x \mapsto \mathscr{A}(x)$ a pour maximum $\mathscr{A}_{\max} = \mathscr{A}(\sqrt{2}) = \dfrac{R^2}{1+\sqrt{2}} = L_{\max} l_{\max}$. Or, d'après notre changement de variable, $\dfrac{L_{\max}}{l_{\max}} = \sqrt{2}$.

Nous en tirons au final $\boxed{\begin{cases} L_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ l_{\max} = \dfrac{R}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{cases}}$. □

Critique de la solution. *Plus élégante, plus élémentaire et moins calculatoire que chacune des deux solutions officielles, la solution présentée ici ne repose pas sur la vituosité en trigonométrie ni en analyse, mais sur la démarche physicienne qui consiste à considérer l'homogénéité des grandeurs manipulées. Il est naturel de faire apparaître les quotients* $\dfrac{L}{l}$ *et* $\dfrac{R^2}{\mathscr{A}}$ *car en divisant une longueur par une longueur, ou une aire par une aire, on obtient une quantité sans unité physique. Par ailleurs, concernant la forme du résultat, il est regrettable que les solutions officielles suppriment les radicaux aux dénominateurs par réflexe mathématique académique : d'une part, cela masque le rapport simple et intéressant de* $\sqrt{2}$ *entre la longueur et la largeur d'un set, et d'autre part cela multiplie dans ce cas les symboles et fait apparaître des signes* $-$ *inutiles. Le lecteur dubitatif pourra vérifier que nous avons bien* $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ *et* $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.