Autour du théorème des six exponentielles

Samuel Rochetin

Samedi 21 décembre 2013

Énoncé. *Soit* $x \in \mathbb{R}, (2^x, 3^x, 5^x) \in \mathbb{N}^3$. *Montrer que* $x \in \mathbb{N}$.

Solution. Remarquons que si $x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$, alors $2^x \in \mathbb{N}$ mais $3^x \notin \mathbb{N}$.

Posons $E \coloneqq \{e^{1 \ln 2}, e^{1 \ln 3}, e^{1 \ln 5}, e^{x \ln 2}, e^{x \ln 3}, e^{x \ln 5}\} = \{2, 3, 5, 2^x, 3^x, 5^x\}$.

Supposons que $x \notin \mathbb{Q}$.

Alors la famille $(1, x)$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

Soient $(p, r, t) \in \mathbb{Z}^3$ et $(q, s, u) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $\frac{p}{q} \ln 2 + \frac{r}{s} \ln 3 + \frac{t}{u} \ln 5 = 0$, c'est-à-dire $2^{\frac{p}{q}} 3^{\frac{r}{s}} 5^{\frac{t}{u}} = 1$. En élevant cette égalité à la puissance qsu puis en posant $d = psu$, $e = rqu$ et $f = tqs$, cela équivaut à $2^d 3^e 5^f = 1$. En fonction du signe des entiers d, e et f, nous avons donc $2^{|d|} 3^{|e|} 5^{|f|} = 1$ ou $2^{|d|} 3^{|e|} = 5^{|f|}$ ou $2^{|d|} 5^{|f|} = 3^{|e|}$ ou $3^{|e|} 5^{|f|} = 2^{|d|}$. Or, 2, 3 et 5 sont premiers donc d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, chacune de ces égalités n'est possible que si $d = e = f = 0$, donc $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \frac{t}{u} = 0$.

Donc la famille $(\ln 2, \ln 3, \ln 5)$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

Les familles $(1, x)$ et $(\ln 2, \ln 3, \ln 5)$ sont libres sur $\mathbb{Q}$ donc d'après le théorème des six exponentielles, au moins l'un des éléments de E est transcendant.

Or, E ne contient que des entiers.

Contradiction.

Donc $x \in \mathbb{Q}$ et $\exists (v, w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{v}{w}$.

Donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{\frac{v}{w}} = n$, c'est-à-dire $2^v = n^w$.

$n^w \in \mathbb{N}$ donc $v \in \mathbb{N}$.

Si $v = 0$, alors $x = 0$ donc $x \in \mathbb{N}$.

Sinon, 2 divise n^w.

Or, 2 est premier donc d'après le lemme d'Euclide, $2 \mid n$.

En écrivant $n = 2^\alpha m$, où m est impair et $\alpha \geq 1$, nous avons $2^v = 2^{\alpha w} m^w$.

Par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, $v = \alpha w$.

Donc $x = \alpha \in \mathbb{N}$. $\square$