Rallye Mathématique d'Alsace 1996
Classe de Terminale

Samuel Rochetin

Samedi 19 mars 2016

Exercice n°1

Énoncé. *Proposer une méthode et l'appliquer pour déterminer, sans l'aide d'une calculatrice, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de* 97^{1996}.

Démonstration. Rappel : soit n un entier naturel. Le résidu de n modulo 10 est égal au chiffre des unités de n. Le résidu de n modulo 100 est égal au nombre formé par les deux derniers chiffres de n. Et ainsi de suite.

97 est proche de 100, ce qui facilite les calculs des congruences modulo 10 et 100.

$$97^{1996} \equiv (-3)^{1996} \equiv 3^{1996} \equiv (3^2)^{998} \equiv (-1)^{998} \equiv 1 \pmod{10}$$

Donc le chiffre des unités de 97^{1996} est 1. Autrement dit, le nombre formé par les deux derniers chiffres de 97^{1996} se termine par 1. Jusque là, il s'agit d'un exercice de cours de spécialité mathématiques en Terminale S.

Examinons ensuite les puissances successives de 3 modulo 10 jusqu'à obtenir 1 (pour un exposant non nul). C'est également une méthode de cours.

$$\begin{aligned}
3^0 &\equiv 1 \pmod{10}\\
3^1 &\equiv 3 \pmod{10}\\
3^2 &\equiv 9 \pmod{10}\\
3^3 &\equiv 7 \pmod{10}\\
3^4 &\equiv 1 \pmod{10}
\end{aligned}$$

La périodicité observée permet de conclure que le nombre 3^k se termine par 1 si, et seulement si, k est un multiple de 4. La démonstration rigoureuse de ce fait, laissée au lecteur, est encore un exercice de cours classique en spécialité mathématiques.

Nous pouvons aussi tenter d'examiner les puissances successives de 3 modulo 100 jusqu'à obtenir 1 (pour un exposant non nul). Bien entendu, sans calculatrice, il faut être ingénieux : par exemple, nous ne calculons pas 3^8 directement, mais nous pouvons écrire $3^8 \equiv 3^2 \times 3^6 \equiv 9 \times 29 \pmod{100}$.

$$\begin{aligned}
3^0 &\equiv 1 \pmod{100}\\
3^1 &\equiv 3 \pmod{100}\\
3^2 &\equiv 9 \pmod{100}\\
3^3 &\equiv 27 \pmod{100}\\
3^4 &\equiv 81 \pmod{100}\\
3^5 &\equiv 43 \pmod{100}\\
3^6 &\equiv 29 \pmod{100}\\
3^7 &\equiv 87 \pmod{100}\\
3^8 &\equiv 61 \pmod{100}
\end{aligned}$$

Le chemin pour obtenir 1 semble incertain. Cependant, nous savons que le nombre 3^k se termine par 1 si, et seulement si, k est un multiple de 4. Nous allons donc concentrer nos efforts sur les exposants multiples de 4.

$$\begin{aligned}
3^0 &\equiv 1 \pmod{100}\\
3^4 &\equiv 81 \pmod{100}\\
3^8 &\equiv 61 \pmod{100}\\
3^{12} &\equiv 41 \pmod{100}\\
3^{16} &\equiv 21 \pmod{100}\\
3^{20} &\equiv 1 \pmod{100}
\end{aligned}$$

Appliquons une dernière méthode de cours. La division euclidienne de 1996 par 20 s'écrit $1996 = 20 \times 99 + 16$, donc :

$$97^{1996} \equiv 3^{20\times 99+16} \equiv (3^{20})^{99} \times 3^{16} \equiv 1^{99} \times 21 \equiv 21 \pmod{100}$$

$\boxed{\text{Les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de } 97^{1996} \text{ forment donc le nombre 21.}}$ □

Critique de la solution. *L'arithmétique n'a fait son grand retour dans les programmes de spécialité mathématiques en Terminale S qu'au début des années 2000, voilà pourquoi la solution officielle de 1996 n'utilise pas les congruences. La solution présentée ici a l'avantage d'être très proche du cours.*

Exercice n°2

Énoncé. *On fixe deux réels strictement positifs a et b. Montrer que si a et b sont inférieurs ou égaux à 2, alors $a^a + b^b > ab$. Qu'en est-il dans les autres cas ?*

Démonstration. Rappel : pour tous réels a, b nous avons l'inégalité $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$. Cette inégalité classique doit être connue du candidat sérieux. Sa preuve est simple : $(a-b)^2 \geq 0 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff \dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$.

Analyse du problème : les exposants étant réels, le problème ne peut être abordé qu'à partir de la Terminale, à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme népérien. Un raisonnement purement élémentaire ne peut donc suffire à prouver cette inégalité et nous nous doutons que de l'analyse se cache derrière. De prime abord, il est impossible de comprendre pourquoi la valeur 2 semble importante. Un premier réflexe consiste à particulariser l'inégalité : supposons que l'inégalité soit vérifiée, alors pour $a = b$, elle devient $a^a + a^a > a \times a$, c'est-à-dire $a^a > \dfrac{a^2}{2}$.

Si nous parvenions à obtenir l'inégalité $x^x > \dfrac{x^2}{2}$ pour tout réel $x \in]0;2]$, alors pour tous réels $a, b \in]0;2]$, nous aurions $a^a + b^b > \dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ d'après le rappel. Or, $x^x > \dfrac{x^2}{2} \iff x^2\left(x^{x-2} - \dfrac{1}{2}\right) > 0 \iff x^{x-2} > \dfrac{1}{2} \iff (x-2)\ln(x) + \ln(2) > 0$, par croissance de la fonction logarithme népérien. Il suffit donc d'étudier le signe de la fonction $f : x \mapsto (x-2)\ln(x) + \ln(2)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est une méthode de cours. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel $\alpha \in]1;2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$, d'où le tableau de variations de f :

x	0	1	α	2	$+\infty$
signe de $f''(x)$	‖		$+$		
variations de f'	‖ $-\infty$	-1	0	$\ln 2$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	‖ $+\infty$	$\ln 2$	$f(\alpha)$	$\ln 2$	$+\infty$

On peut alors étudier la convergence de la suite (u_n) en montrant que l'équation f(x) = x a une seule solution α sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ puis que $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{9}\right)^n\times\frac{1}{2}$ à l'aide éventuellement de l'inégalité des accroissements finis. On peut alors conclure que quelque soit le point de départ, la trajectoire se rapproche de celle recherchée dans l'exercice.

Commentaires

Les idées de méthode pour résoudre cet exercice, abordé dans environ deux copies sur trois, font appel soit à un processus d'itération, soit à un raisonnement de géométrie affine.
Dans le premier cas, qui est aussi le plus fréquent dans les copies, partant d'un intervalle ou d'un point particulier dont on détermine graphiquement les images successives, on a l'impression d'aboutir à un point limite. Cependant, la maîtrise des connaissances d'un élève de Première sur les suites lui permet difficilement de prouver cette conjecture. Cette démonstration est proposée dans le corrigé.
Dans le second cas, rencontré bien plus rarement dans les copies, il suffit d'écrire des équations de droites dans un repère non orthonormé et de chercher certaines de leurs intersections. Seuls trois binômes mènent ce raisonnement correctement mais un seul écrit la conclusion exactement. De petites erreurs de calcul empêchent les deux autres d'obtenir la bonne réponse.
Le raisonnement de géométrie analytique se fait ici de manière "naturelle" dans un repère non orthonormé. Vraisemblablement, ce type de repère est peu exploité en classes de seconde et de première. Cela explique certainement que peu de candidats aient opté pour la méthode analytique.

Rallye de Terminale

Exercice 1

Proposer une méthode et l'appliquer pour déterminer, sans l'aide d'une calculatrice, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de 97^{1996}.

Solution

Première étape : On écrit $97^{1996}=(100-3)^{1996}$ et on applique la formule du binôme :

$$\begin{aligned}97^{1996}=(100-3)^{1996}&=\sum_{p=0}^{1996}C_{1996}^{p}100^{p}(-3)^{1996-p}\\&=(-3)^{1996}+\sum_{p=1}^{1996}C_{1996}^{p}100^{p}(-3)^{1996-p}\\&=3^{1996}+100\sum_{p=1}^{1996}C_{1996}^{p}100^{p-1}(-3)^{1996-p}\end{aligned}$$

Or $100\sum_{p=1}^{1996} C_{1996}^{p} 100^{p-1}(-3)^{1996-p}$ est un multiple de 100, donc les deux derniers chiffres de 97^{1996} sont les mêmes que ceux de 3^{1996}.

Deuxième étape : On peut utiliser une deuxième fois la formule du binôme en écrivant :

$$\begin{aligned} 3^{1996} &= 9^{998} = (10-1)^{998} \\ &= (-1)^{998} + 998 \times (-1)^{997} \times 10 + \sum_{p=2}^{998} C_{998}^{p}(-1)^{998-p}10^{p} \\ &= 1 - 9980 + 100 \times a \\ &= 1 + 20 - 10000 + 100 \times a \\ &= 21 + 100(a-100) \end{aligned}$$

On en conclut que le nombre se termine par 21 .

Commentaires

Le premier exercice était un problème d'arithmétique "élémentaire". Il a été très souvent abordé dans les copies , ce qui montre un intérêt pour un domaine quasiment disparu des programmes de nos classes. Nous relevons avec plaisir le nombre important de binômes parvenant au résultat correct, 21.

Cependant l'examen des copies appelle quelques commentaires supplémentaires. Nous observons un grand nombre de constatations (utilisation de la calculatrice ?) de la périodicité des deux derniers chiffres de 97^n sans véritable démonstration.

Signalons également (le problème est lié au précédent), qu'il était nécessaire de prouver que dans une multiplication, seuls les deux derniers chiffres de chaque terme influent sur ceux du produit. Cela a très rarement été démontré.

Ce résultat, vraisemblablement apparu comme naturel à bon nombre de candidats, nous amène à nous interroger sur leur réaction face à un quotient. La situation n'est plus la même, comme le montre l'exemple suivant : $5220 : 45 = 116$

$19620 : 45 = 436$

Exercice 2

On fixe deux réels strictement positifs a et b . Montrer que si a et b sont inférieurs ou égaux à 2, alors $a^a + b^b > ab$. Qu'en est-il dans les autres cas ?

Solution

1) Comparaison de x^x et x pour $x > 0$

• Si $x = 1$ alors $x^x = x$