Anneau non commutatif

Samuel Rochetin

Samedi 5 mai 2018

Exercice. *Soit* $(A, +, \times)$ *un anneau non commutatif, par exemple l'anneau des matrices carrées d'ordre* $n \geq 2$ *à coefficients réels. Soient* a, b *deux éléments de cet anneau tels que* $a + b$ *soit inversible. Posons* $c \coloneqq (a + b)^{-1}$*. Montrer que* $acb = bca$*.*

Solution. Notons 1 le neutre pour la loi $\times$. Remarquons tout d'abord que deux tels éléments a, b existent : il suffit en effet de considérer $a = 1, b = 0$ pour avoir $a + b$ inversible.

Par définition de l'inverse de c pour la loi $\times$ et par distributivité, $(a + b)c = 1 \iff ac + bc = 1$. Multiplier cette égalité à droite par b donne, par distributivité, $(ac + bc)b = b \iff acb + bcb = b$.

De même, $c(a + b) = 1 \iff ca + cb = 1$ et multiplier à gauche par b donne $bca + bcb = b$.

Par identification et par définition de l'inverse de bcb pour la loi $+$, il vient $acb + bcb = bca + bcb \iff acb + bcb + (-bcb) = bca + bcb + (-bcb) \iff \boxed{acb = bca.}$ $\square$