Troisième
Devoir de recherche

Samuel Rochetin

Vendredi 10 mai 2019

Résumé

Le but de ce devoir est de démontrer les différentes formules des aires latérales d'un cône de révolution et d'un tronc de cône de révolution à la manière de DÉMOCRITE (460-370 av. J.-C.).

1 Aire latérale d'un cône de révolution

Soit $(\mathcal{S}_3)$ une pyramide régulière à base triangulaire de côtés de longueur l, de hauteur h et d'apothème a.

1. Justifier que l'aire d'une face latérale de $(\mathcal{S}_3)$ est $\frac{1}{2}al$.
2. Justifier que A_3, l'aire latérale de $(\mathcal{S}_3)$, est $\frac{3}{2}al$.
3. Justifier que P_3, le périmètre de la base de $(\mathcal{S}_3)$, est $3l$.
4. Justifier que $A_3 = \frac{1}{2}aP_3$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Soit $(\mathcal{S}_n)$ une pyramide régulière de base à n côtés de longueur l, de hauteur h et d'apothème a.

1. Exprimer l'aire d'une face latérale de $(\mathcal{S}_n)$ en fonction de a et l.
2. En déduire A_n, l'aire latérale de $(\mathcal{S}_n)$, en fonction de a, l et n.
3. Exprimer P_n, le périmètre de la base de $(\mathcal{S}_n)$, en fonction de l et n.
4. En déduire une expression de A_n en fonction de a et P_n.
5. Dans cette question, on suppose n infiniment grand.
   (a) De quelle figure la base de la pyramide $(\mathcal{S}_n)$ se rapproche-t-elle ?
   (b) En déduire les expressions limites de P_n puis A_n.
   (c) De quel solide la pyramide $(\mathcal{S}_n)$ se rapproche-t-elle ?
6. En déduire une expression de l'aire latérale d'un cône de révolution en fonction de son apothème a et du rayon de sa base r.
7. (a) Exprimer l'aire latérale d'un cône de révolution en fonction de son demi-angle au sommet α, de sa hauteur h et du rayon de sa base r.
   (b) Exprimer l'aire latérale d'un cône de révolution en fonction de sa hauteur h et du rayon de sa base r.

2 Aire latérale d'un tronc de cône de révolution

Soit $(\mathcal{S})$ un tronc de cône de révolution de génératrice a et de rayons r_1 et r_2, où $r_1 < r_2$. Soient a_1 et a_2 les apothèmes respectifs de deux cônes de révolution de même axe, de même apex et dont r_1 et r_2 sont les rayons de leurs bases respectives. Soit A l'aire latérale de $(\mathcal{S})$.

1. À l'aide d'une figure, justifier que $a = a_2 - a_1$.
2. À l'aide des résultats établis à la partie précédente, justifier que $A = \pi a_2 r_2 - \pi a_1 r_1$.
3. Montrer que $A = \pi a(r_1 + r_2)$.