Théorème de Cauchy

Samuel Rochetin

Mercredi 20 janvier 2016

Problème. *Soit G un groupe fini d'ordre n et soit p un diviseur premier de n. Le but de ce problème est de montrer qu'il existe un élément $x \in G$ d'ordre p. Ce résultat est un théorème de Cauchy. Dans un premier temps, nous le montrerons pour G abélien. Dans un second temps, nous le montrerons dans le cas général.*

1. *Soient H un sous-groupe de G et $\overline{g} = gH$ un élément du groupe quotient G/H. Comparer les ordres de g et $\overline{g}$ respectivement dans H et G/H.*
2. *Montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que pour tout diviseur premier p de n, il existe dans G un élément d'ordre p.*

On considère désormais que G est un groupe non nécessairement abélien. On pose $X := \{(x_1, \ldots, x_p) \in G^p, x_1 x_2 \ldots x_p = e_G\}$, on note H le sous-groupe de $(S_n, \circ)$ engendré par le p-cycle $\sigma = (1, 2, \ldots, p)$.

3. *Montrer que $|X| = n^{p-1}$.*
4. *Soit k un entier naturel. Montrer que l'application $f_k : S_n \times X \to X$ définie par $(\sigma^k, (x_1, \ldots, x_p)) \mapsto (x_{\sigma^k(1)}, \ldots, x_{\sigma^k(p)})$ est une action de groupe.*
5. *On pose $X^H := \{x \in H, \mathcal{O}_x = \{x\}\}$ l'ensemble des éléments de H dont l'orbite est réduite à un seul élément. Montrer que $X^H \neq \emptyset$.*
6. *Montrer que p divise $|X^H|$.*
7. *En déduire qu'il existe un élément d'ordre p dans G.*