Théorème de Cayley

Samuel Rochetin

Dimanche 29 mai 2016

Problème. *Soit* $(G, \times)$ *un groupe fini à* n *éléments. Le but de cet exercice est de démontrer un théorème de Cayley énonçant que* $(G, \times)$ *est isomorphe à un sous-groupe de* $(\mathcal{S}_n, \circ)$.

1. *Montrer que pour tout* $x \in G$ *fixé, l'application* $f_x : G \to G$ *définie par* $y \mapsto xy$ *est une permutation de* G.
2. *La question précédente nous permet de définir une application* $\varphi : (G, \times) \to (\mathcal{S}_n, \circ)$ *par* $x \mapsto f_x$. *Montrer que* φ *est un morphisme de groupes.*
3. *Montrer que* φ *est injectif.*
4. *En déduire qu'il existe un sous-groupe de* $(\mathcal{S}_n, \circ)$ *isomorphe à* $(G, \times)$.

Corrigé.

1. $f_x \circ f_{x^{-1}} = f_{x^{-1}} \circ f_x = Id_G$ et G est fini à n éléments, donc f_x est une permutation de G.
2. $\forall (x, x') \in G^2, \varphi(xx') = f_{xx'} = f_x \circ f_{x'} = \varphi(x) \circ \varphi(x')$ donc φ est un morphisme de groupes.
3. $\varphi(x) = Id_{\mathcal{S}_n} \iff \forall y \in G, xy = y \iff x = Id_G$ en multipliant à droite par y^{-1}. $\ker \varphi = \{Id_G\}$ donc φ est injectif.
4. φ est un morphisme de groupes, donc d'après le cours, $(\varphi(G), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$. Or, φ est surjectif de $(G, \times)$ sur $(\varphi(G), \circ)$, et d'après la question précédente, φ est injectif. Donc φ est un isomorphisme de $(G, \times)$ sur $(\varphi(G), \circ)$. Il existe donc bien un sous-groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ isomorphe à $(G, \times)$.

$\square$