Somme de classes d'équivalence

Samuel Rochetin

Mardi 13 octobre 2015

Résumé

Soit $+$ une loi de composition interne sur un ensemble E. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E compatible avec la loi $+$. Le but de ce document est de montrer comment munir l'ensemble quotient $E/\sim$ d'une loi de composition interne induite par la loi $+$, notée abusivement $+$ aussi.

Proposition 1. $(E/\sim) \times (E/\sim) \to E/\sim, (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x} + \overline{y} := \overline{x+y}$ *est une loi de composition interne.*

Démonstration. L'ensemble d'arrivée est bien $E/\sim$. Il suffit donc de montrer que nous sommes en présence d'une application bien définie.

Intuitivement, une application est bien définie si tout élément de l'ensemble de départ admet une unique image dans l'ensemble d'arrivée.

Cela prend son importance ici puisque toute classe d'équivalence peut admettre plusieurs représentants au départ : on veut donc que l'image $\overline{x+y}$ ne dépende pas des représentants choisis pour $\overline{x}, \overline{y}$.

Soient x', y' deux représentants respectifs de $\overline{x}, \overline{y}$.

On a donc $x' \sim x, y' \sim y$.

Donc par compatibilité, $x' + y' \sim x + y$.

Donc $\overline{x' + y'} = \overline{x+y}$.

Ainsi, l'image $\overline{x+y}$ ne dépend pas des représentants choisis pour $\overline{x}, \overline{y}$ donc l'application est bien définie. $\square$