Terminale S
Devoir de recherche

Samuel Rochetin

Décembre 2013

Résumé

Le but de ce devoir est de construire une fonction continue par composée d'une fonction non continue faisant intervenir la fonction partie entière.

On admet que pour tout réel x, il existe un unique entier relatif $E(x)$ appelé « partie entière de x », tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$. Par exemple : $E(\pi) = 3$ et $E(-1,5) = -2$.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - E(x)$ et $g(x) = x(x-1)$.

On rappelle que la composée de f par g, notée $g \circ f$, est définie par $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.

1. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ E(x+1) = E(x) + 1$.
   (b) En déduire que f est 1–périodique.
   (c) Étudier f sur $[0;1]$.
   (d) Tracer la représentation graphique de f sur $[-3;3]$.
   (e) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. (a) Étudier g et tracer sa représentation graphique sur $[-3;3]$.
   (b) g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
3. (a) Montrer que $g \circ f$ est 1–périodique.
   (b) Étudier $g \circ f$ sur $[0;1]$.
   (c) Tracer la représentation graphique de $g \circ f$ sur $[-3;3]$.
   (d) $g \circ f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. Que peut-on conclure concernant la réciproque de la proposition suivante (figurant dans le cours sur la continuité) :

   « Si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$ » ?