Le critère de divisibilité par 7

Samuel Rochetin

Vendredi 23 septembre 2016

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}$ de chiffre des unités u et de nombre de dizaines d. Alors n est divisible par 7 si et seulement si $d - 2u$ est divisible par 7.*

Démonstration. $7 \mid n \iff 10d + u \equiv 0 \pmod 7 \iff -20d - 2u \equiv 0 \pmod 7 \iff d - 2u \equiv 0 \pmod 7 \iff 7 \mid d - 2u$. □

Remarque. *En 2019, Chika Ofili, un Nigérian âgé de douze ans, a cru découvrir le critère de divisibilité par 7 avec la condition nécessaire et suffisante $d + 5u$ est divisible par 7. Cependant, $d - 2u \equiv 0 \pmod 7 \iff d + 5u \equiv 0 \pmod 7$ donc il s'agissait du même critère déjà bien connu.*

Exemple. 413 *est-il divisible par* 7 *? Nous avons* $u = 3$ *et* $d = 41$*, donc* $d - 2u = 41 - 2 \times 3 = 35$*. Or,* 35 *est divisible par* 7*, donc* 413 *est divisible par* 7*.*

Exercice. $123\,456$ *est-il divisible par 7 ?*

Solution. $12\,345 - 2 \times 6 = 12\,333$ donc $123\,456$ est divisible par 7 si et seulement si $12\,333$ est divisible par 7. Nous appliquons de nouveau le critère : $1\,233 - 2 \times 3 = 1\,227$ donc $12\,333$ est divisible par 7 si et seulement si $1\,227$ est divisible par 7. De même, $122 - 2 \times 7 = 108$ donc $1\,227$ est divisible par 7 si et seulement si 108 est divisible par 7. Or, $10 - 2 \times 8 = -6$ et -6 n'est pas divisible par 7. Donc $123\,456$ n'est pas divisible par 7. □