Croissances comparées

Samuel Rochetin

Dimanche 13 mai 2018

Exercice. *Déterminer, si elle existe,* $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2} \ln\left(x^2+1\right)$.

Solution. Traitons cette question avec les outils élémentaires de Terminale S. Notons que le changement de variable $u \coloneqq x^2+1$ ne permet pas de conclure. Utilisons les propriétés du logarithme.

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, \frac{x-1}{x^2} \ln\left(x^2+1\right) &= \frac{x-1}{x^2} \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= \frac{x-1}{x^2} \ln x^2 + \frac{x-1}{x^2} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{x}{x^2} \ln x^2 - \frac{\ln x^2}{x^2} + \frac{x-1}{x^2} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\
&= 2\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x^2}{x^2} + \frac{x-1}{x^2} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Le changement de variable $u \coloneqq x^2$ donne $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2} = \lim_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$. Nous avons aisément $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$. Par opérations sur les limites (multiplication par un scalaire, somme et produit), il vient $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2} \ln\left(x^2+1\right) = 0.}$ $\square$