Dérivation - Première S

Samuel Rochetin

Janvier 2014

1. (*) Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^4 - 4x + 2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et préciser sa valeur.

2. (**) Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 1$ et donner l'équation de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 0.

3. (**) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^4 + 2x^2 + x$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

   (a) Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur 1.

   (b) Démontrer que pour deux de ces points, la tangente est commune.

4. (**) Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = (x-4)\sqrt{x} + 2x$.

5. (*) Soit la fonction polynôme définie par $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, où a, b, c sont trois réels.

   (a) Déterminer $P'(x)$.

   (b) En déduire une expression simple de $\left(\dfrac{P'}{P}\right)(x)$, pour tout x différent de a, b et c.

6. (*) Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x - 6}$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

   (a) Déterminer le domaine de définition de f.

   (b) Déterminer les intersections de $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

   (c) Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et déterminer $f'(x)$.

   (d) Étudier les variations de f.

   (e) Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 2.

7. (**) Étudier la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2 - 4x + 3}$.

8. (*) Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{-5}{x+1}$.

   (a) Montrer que f et g sont définies et dérivables sur un domaine à préciser et déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$.

   (b) Déterminer $f(x) - g(x)$ et justifier le résultat de la question précédente.

9. (*) Soit la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x}$.

   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

   (b) Montrer que f est dérivable en 0. Conclure.

(c) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et retrouver le résultat de la question précédente.

10. (**) D'après le cours, si deux fonctions u et v sont dérivables en a, alors leur produit uv est une fonction dérivable en a et $(uv)'(a) = (u'v + uv')(a)$. Le but de cet exercice est d'étudier la réciproque de cette propriété.

    Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$.

    (a) Étudier la dérivabilité de f en 0.

    (b) Conclure.

11. (**) Montrer que la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On pourra se rappeler l'identité remarquable $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b)$.

12. (***) Soit la fonction racine définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

    (a) Déterminer l'approximation affine de $f(1+h)$ pour h voisin de 0.

    (b) Montrer que pour tout réel $h \geq -1, f(1+h) - \left(\dfrac{1}{2}h + 1\right) = \dfrac{-\frac{1}{4}h^2}{\sqrt{1+h} + \left(\frac{1}{2}h+1\right)}$.

    (c) Montrer que pour tout réel $h \geq 0, \sqrt{1+h} + \left(\dfrac{1}{2}h + 1\right) \geq 2$.

    (d) En déduire que pour tout réel $h \geq 0, -\dfrac{1}{8}h^2 \leq f(1+h) - \left(\dfrac{1}{2}h + 1\right) \leq 0$.

    (e) À L'aide du résultat précédent, donner une valeur approchée de $\sqrt{1,02}$ et un majorant de l'erreur commise.

13. (*) Dériver les fonctions composées définies par les expressions suivantes (on ne se souciera pas de l'ensemble de dérivation) :

    (a) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

    (b) $g(x) = \sqrt{7x^4 - 2x - 1}$

    (c) $h(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x}}$

    (d) $k(x) = \sqrt{x^2+1}$

    (e) $l(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$

14. (**) Soit $x > 0$. En dérivant l'égalité $(\sqrt{x})^2 = x$, retrouver l'expression de la dérivée de la fonction racine.