Dérivée bornée

Samuel Rochetin

Samedi 5 mai 2018

Exercice. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées.*

1. *Montrer que si f est positive, alors f' est bornée.*
2. *Montrer que f' est bornée sans supposer f positive.*

Solution. Notons $M_0 := \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 := \sup_{\mathbb{R}} |f''|$.

1. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée en $a = x$ et $b = x + h$ donne :

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \sup_I |f''| \frac{h^2}{2},$$

avec $I = [x, x+h]$ ou $I = [x+h, x]$ en fonction du signe de h.

Par définition de M_2, nous avons $\sup_I |f''| \leq M_2$ donc la positivité de $\frac{h^2}{2}$ et la transitivité de la relation d'ordre donnent :

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2}{2} h^2.$$

Par propriété de la valeur absolue, il vient :

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) \leq |f(x+h) - f(x) - hf'(x)|.$$

La transitivité de la relation d'ordre donne :

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) \leq \frac{M_2}{2} h^2 \iff f(x+h) \leq \frac{M_2}{2} h^2 + f'(x)h + f(x).$$

Par hypothèse, $0 \leq f(x+h)$ donc il vient :

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \frac{M_2}{2} h^2 + f'(x)h + f(x).$$

Pour x fixé, nous reconnaissons une fonction trinôme du second degré en h positive sur $\mathbb{R}$ donc de discriminant négatif.

$$\Delta \leq 0 \iff f'(x)^2 - 2M_2 f(x) \leq 0 \iff |f'(x)| \leq \sqrt{2M_2 f(x)}.$$

Par définition de M_0 et croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, il vient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0 M_2}.}$$

2. Le cas général se traite différemment. Partons de :

$$\forall h \in \mathbb{R}, |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2}{2} h^2.$$

Par propriété de la valeur absolue, il vient :

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| = |hf'(x) - (f(x+h) - f(x))|.$$

La deuxième inégalité triangulaire donne :

$$||hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)|| \leq |hf'(x) - (f(x+h) - f(x))|.$$

Par propriété de la valeur absolue, il vient :

$$|hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \leq ||hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)||.$$

La transitivité de la relation d'ordre donne :

$$|hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \leq \frac{M_2}{2} h^2.$$

Ainsi :

$$|hf'(x)| \leq \frac{M_2}{2} h^2 + |f(x+h) - f(x)|.$$

L'inégalité triangulaire et la définition de M_0 donnent :

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| \leq 2M_0.$$

Puisque $|hf'(x)| = |h| \times |f'(x)|$, en divisant par $|h| > 0$, il vient :

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, |f'(x)| \leq \frac{M_2}{2}|h| + \frac{2M_0}{|h|}.$$

$\boxed{\text{Si } M_0 = 0\text{, alors } f \text{ est la fonction nulle donc } f' \text{ est bornée.}}$

$\boxed{\text{Si } M_2 = 0\text{, alors } f' \text{ est constante donc bornée.}}$

Sinon, une simple étude montre que la fonction $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+^*, h \mapsto \frac{M_2}{2}|h| + \frac{2M_0}{|h|}$ atteint son minimum global $2\sqrt{M_0 M_2}$ en $h = \pm 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$. Ainsi,

$\boxed{\text{si } M_0 M_2 \neq 0\text{, alors } \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.}$

□