Le déterminant circulant droit

Samuel Rochetin

Mardi 13 février 2007

Énoncé

Soit la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$\Gamma_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$. On a $\boxed{\mathrm{dét}(\Gamma_n) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \theta_j^{k-1}}$, avec $(\theta_j)_{1 \leq j \leq n}$ la famille des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

Démonstration

Posons $V_{\theta_j} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_j \\ \vdots \\ \theta_j^{n-1} \end{pmatrix}$. On remarque que $\Gamma_n * V_{\theta_j} = \sum_{k=1}^{n} a_k \theta_j^{k-1} \cdot V_{\theta_j}$, car comme θ_j est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $\theta_j^{-k} = \theta_j^{n-k}$.

Soit U la matrice composée des colonnes $(V_{\theta_j})_{1 \leq j \leq n}$. On a $\Gamma_n * U = U * \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_k \theta_1^{k-1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=1}^{n} a_k \theta_n^{k-1} \end{pmatrix}$.

D'où $\mathrm{dét}(\Gamma_n) \cdot \mathrm{dét}(U) = \mathrm{dét}(U) \cdot \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \theta_j^{k-1}$.

Par ailleurs, $\mathrm{dét}(U)$ est le déterminant de Vandermonde de la famille $(\theta_j)_{1 \leq j \leq n}$, il est donc non nul car les racines de l'unité sont deux à deux distinctes.

D'où le résultat.