Khôlle d'analyse

Samuel Rochetin

Dimanche 29 janvier 2017

Exercice. *Donner le développement asymptotique à quatre termes de la suite définie par* $u_0 > 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.

Solution. Commençons par examiner le comportement du terme général. Nous pouvons montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. Nous en déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n-1+u_{n-1}} \geq \sqrt{n-1}$, par croissance de la fonction racine carrée. Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\sqrt{\ldots}}}$ donc nous avons l'intuition que n est le terme prépondérant sous la racine et que $u_n \sim \sqrt{n}$. Montrons-le.

Examinons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \left(1 + \dfrac{u_{n-1}-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$. Il s'agit de comparer u_{n-1} et n. Nous avons besoin d'une inégalité, ce qui nous mène à nous intéresser à la monotonie de (u_n). Essayons de montrer par récurrence que (u_n) est croissante. L'hérédité est évidente : s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} \geq u_n$, alors $u_{n+2} = \sqrt{n+1+u_{n+1}} \geq \sqrt{n+u_n} = u_{n+1}$. La difficulté vient de l'initialisation. En effet, si $u_0 \in]0;1]$, alors $u_1 = \sqrt{u_0} \geq u_0$ par comparaison des fonctions de référence sur $[0;1]$. Dans ce cas, (u_n) est bien croissante. En revanche, si $u_0 \in]1;+\infty[$, alors $u_1 = \sqrt{u_0} < u_0$, donc l'initialisation est infirmée. Cependant, (u_n) est croissante à partir d'un certain rang. En effet, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$, puisque (u_n) est minorée par 0, le théorème de la limite monotone assure que (u_n) converge. Contradiction. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$. Et d'après ce qui précède, (u_n) est croissante à partir du rang n_0. Nous avons (u_n) croissante à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc à partir d'un certain rang, $u_n \geq u_{n-1} > 1 \implies n + u_{n-1} \geq u_{n-1}^2 \iff \dfrac{1}{u_{n-1}-1} \geq \dfrac{u_{n-1}}{n}$. Ainsi, $0 \leq \dfrac{u_{n-1}}{n} \leq \dfrac{1}{u_{n-1}-1}$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n-1}}{n} = 0$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{u_{n-1}-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$, donc $u_n \sim \sqrt{n}$.

La proposition du cours $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$ nous permet d'en déduire le premier terme du développement asymptotique : $u_n = \sqrt{n} + o\left(\sqrt{n}\right)$.

Pour obtenir le deuxième terme, injectons ce résultat dans la relation de récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n}\left(1 + \dfrac{\sqrt{n-1}}{n} - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{\sqrt{n-1}}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. En utilisant $\dfrac{\sqrt{n-1}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, le développement limité en 0 usuel $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ et les manipulations classiques de la notation de Landau, il vient $u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + o(1)$.

Pour obtenir le troisième terme, injectons ce résultat dans la relation de récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n}\left(1 + \dfrac{\sqrt{n-1}}{n} - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. Or, $\dfrac{\sqrt{n-1}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Pour obtenir le quatrième terme, injectons ce résultat dans la relation de récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n}\left(1 + \dfrac{\sqrt{n-1}}{n} - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{4n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. Nous ne pouvons pas écrire $\dfrac{\sqrt{n-1}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ donc nous précisons le développement asymptotique du terme $\dfrac{\sqrt{n-1}}{n}$. Ainsi, $\dfrac{\sqrt{n-1}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Donc $\boxed{u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4\sqrt{n}} - \dfrac{3}{8n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right).}$ $\square$