Diamètre d'un ensemble

Samuel Rochetin

Dimanche 12 novembre 2017

Exercice. *Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Nous définissons l'ensemble $B \coloneqq \{|x-y|, (x,y) \in A^2\}$.*

1. *Montrer que B admet une borne supérieure. On appelle diamètre de A et on note $d(A)$ cette borne supérieure.*
2. *Montrer que $d(A) = \sup A - \inf A$.*

Solution.

1. A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, bornée donc majorée et minorée, donc A admet une borne supérieure $\sup A$ et une borne inférieure $\inf A$. Montrons que B est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Par hypothèse, A contient au moins un élément x. Par définition, $|x-x| = 0 \in B$ donc B est non vide. B est un ensemble de réels positifs ou nuls donc B est une partie de $\mathbb{R}$. Montrons que B est majorée. Soit $(x,y) \in A^2$. Supposons $x \geq y$. Alors $|x-y| = x-y$. Nous avons $x \leq \sup A$ et $y \geq \inf A \iff -y \leq -\inf A$ donc par somme, $|x-y| = x-y \leq \sup A - \inf A$. Or, $|x-y| = |y-x|$ donc le problème est symétrique en x et y, donc nous obtenons la même majoration en supposant $x \leq y$. Donc B est majorée par $\sup A - \inf A$. Au final, B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc $\boxed{B \text{ admet une borne supérieure.}}$
2. Nous avons montré que B était majorée par $\sup A - \inf A$. Par définition de la borne supérieure, $d(A)$ est le plus petit majorant de B donc $d(A) \leq \sup A - \inf A$. Montrons que $d(A) \geq \sup A - \inf A$. Soit $(x,y) \in A^2$. Par définition, $d(A) \geq |x-y|$. Or, $|x-y| \geq x-y$. Donc $d(A) \geq x-y \iff y + d(A) \geq x$. Par définition, $\sup A$ est le plus petit majorant de A donc $y + d(A) \geq \sup A \iff y \geq \sup A - d(A)$. Par définition, $\inf A$ est le plus grand minorant de A donc $\inf A \geq \sup A - d(A) \iff d(A) \geq \sup A - \inf A$. Par double inégalité, nous avons $\boxed{d(A) = \sup A - \inf A.}$

$\square$