Diviseurs et diviseurs premiers

Samuel Rochetin

Samedi 12 mai 2018

Exercice. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *admettant exactement six diviseurs positifs. Montrer que* $n = p^5$ *ou* $n = p^2 q$*, où* p, q *sont deux nombres premiers distincts.*

Solution. $n > 1$ donc la décomposition canonique de n en produit de facteurs premiers s'écrit $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$, avec $r \in \mathbb{N}^*$ et $\forall i \in [\![1, r]\!], \alpha_i \in \mathbb{N}^*$. Soit N le nombre de diviseurs positifs de n. Nous avons $N = (\alpha_1 + 1) \times \cdots \times (\alpha_r + 1)$. Si n admet au moins trois diviseurs premiers distincts, alors $6 = N \geq (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \geq 2^3 = 8$. Contradiction. Donc n admet au plus deux diviseurs premiers distincts. Si n admet un unique diviseur premier, alors, quitte à réindexer, $n = p_1^{\alpha_1}$ et $6 = N = \alpha_1 + 1$ donc $\alpha_1 = 5$. Ainsi, il existe un nombre premier p tel que $\boxed{n = p^5.}$ Si n admet deux diviseurs premiers distincts, alors, quitte à réindexer, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ et $6 = N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$ donc $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ ou $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$. Ainsi, il existe deux nombres premiers p, q distincts tels que $\boxed{n = p^2 q.}$ $\square$