Congruences

Samuel Rochetin

Mardi 13 décembre 2011

Résumé

Le but de ce problème est de démontrer que $20^{15} - 1$ est divisible par $11 \times 31 \times 61$ puis de compter le nombre de chiffres de son écriture décimale.

1. Divisibilité par 11.
   (a) Montrer que $2^5 \equiv -1 \ [11]$ et $10 \equiv -1 \ [11]$.
   (b) En déduire que $10^5 \equiv -1 \ [11]$ puis que $20^5 \equiv 1 \ [11]$.
   (c) En déduire que $20^{15} \equiv 1 \ [11]$. Conclure.

2. Divisibilité par 31
   (a) Montrer que $2^5 \equiv 1 \ [31]$ et $5^3 \equiv 1 \ [31]$.
   (b) En déduire que $4^5 \equiv 1 \ [31]$ et $5^{15} \equiv 1 \ [31]$.
   (c) En déduire que $20^{15} \equiv 1 \ [31]$. Conclure.

3. Divisibilité par 61
   (a) Montrer que $3^4 \equiv 20 \ [61]$. En déduire que $3^{60} \equiv 20^{15} \ [61]$.
   (b) À l'aide du petit théorème de Fermat, montrer que $3^{60} \equiv 1 \ [61]$.
   (c) Conclure.

4. Divisibilité par $11 \times 31 \times 61$

   Déduire des questions précédentes que $20^{15} - 1$ est divisible par $11 \times 31 \times 61$.

5. Nombre de chiffres de l'écriture décimale de $20^{15} - 1$.

   Soit N un entier naturel à $n \geq 1$ chiffre(s).
   (a) Montrer que l'on a l'encadrement suivant : $10^{n-1} \leq N < 10^n$.
   (b) En déduire que $n - 1 \leq \log(N) < n$.
   (c) Sachant que $\log(20^{15} - 1) \approx 19,5154$, en déduire le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $20^{15} - 1$.