# Khôlle d'algèbre

Samuel Rochetin

Vendredi 16 février 2018

**Exercice.** *Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E$ de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit $r \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que $\operatorname{rg} u = r$ si et seulement si il existe $r$ vecteurs $y_1, \dots, y_r$ linéairement indépendants dans $F$ et $r$ formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ linéairement indépendantes dans $E^*$ tels que $\forall x \in E, u(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \varphi_i(x) y_i$.*
2. *Montrer que dans ce cas, $\ker u = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \ker \varphi_i$.*
3. *Trouver une telle décomposition pour $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, 2x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 + 4x_2 - x_3)$.*

*Solution.*

1. Le cas où $r = 0$ correspond à l'application nulle.
   Supposons $r \geq 1$.
   Si $\operatorname{rg} u = r$, alors $\dim \operatorname{im} u = r$ donc il existe une base $(y_1, \dots, y_r)$ de $\operatorname{im} u$. Donc $\forall x \in E, \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r, u(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i y_i$, par décomposition. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, notons $\varphi_i$ la forme linéaire qui à un vecteur $x \in E$ associe la coordonnée de $u(x)$ selon $y_i$. Ainsi, nous avons bien $\forall x \in E, u(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \varphi_i(x) y_i$. Montrons que les formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ sont linéairement indépendantes dans $E^*$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r, \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi_i = 0$. Cette égalité est vraie pour tout vecteur de $E$ donc nous allons la particulariser pour des vecteurs bien choisis. $u$ est surjective de $E$ dans $\operatorname{im} u$ donc $\forall i \in [\![1, r]\!], \exists x_i \in E, u(x_i) = y_i$. Soit $j \in [\![1, r]\!]$ fixé. Nous avons $y_j = u(x_j) = \sum\limits_{i=1}^{r} \varphi_i(x_j) y_i$ donc par unicité de la décomposition d'un vecteur sur une base, $\forall (i,j) \in [\![1, r]\!]^2, \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Ainsi, en particularisant l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi_i = 0$ pour $x_1, \dots, x_r$, nous obtenons bien $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.
   Réciproquement, supposons qu'il existe $r$ vecteurs $y_1, \dots, y_r$ linéairement indépendants dans $F$ et $r$ formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ linéairement indépendantes dans $E^*$ tels que $\forall x \in E, u(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \varphi_i(x) y_i$.

Méthode n°1 : montrons que $(y_1, \ldots, y_r)$ est une base de $\operatorname{im} u$. Montrons que $(y_1, \ldots, y_r)$ est génératrice de $\operatorname{im} u$. Nous avons déjà $\operatorname{im} u \subset \operatorname{Vect}(y_1, \ldots, y_r)$. Montrons que $\forall i \in [\![1, r]\!], y_i \in \operatorname{im} u$. Il suffit de montrer que $\exists (x_1, \ldots, x_r) \in E^r, \forall (i, j) \in [\![1, r]\!]^2, \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Ceci est assuré par le théorème de la base antéduale appliqué à la famille libre $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ complétée en une base de $E^*$. Ainsi, $\forall i \in [\![1, r]\!], y_i = u(x_i)$. Par linéarité de $u$, il vient $\operatorname{Vect}(y_1, \ldots, y_r) \subset \operatorname{im} u$ donc $\operatorname{im} u = \operatorname{Vect}(y_1, \ldots, y_r)$. La famille $(y_1, \ldots, y_r)$ est donc génératrice de $\operatorname{im} u$. Or, $(y_1, \ldots, y_r)$ est libre, donc $(y_1, \ldots, y_r)$ est une base de $\operatorname{im} u$, donc $\operatorname{rg} u = r$.

Méthode n°2 : posons $G := \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$. L'indépendance linéaire de $y_1, \ldots, y_r$ donne $\ker u = \{x \in E, \forall i \in [\![1, r]\!], \varphi_i(x) = 0\}$. Nous pouvons montrer aisément que $\ker u = G^\circ$. Or, $\dim G + \dim G^\circ = \dim E^* = \dim E = n$ et $\dim G = r$ car $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ est libre. Donc $\dim \ker u = n - r$. Donc d'après le théorème du rang, $\operatorname{rg} u = \dim E - \dim \ker u = r$.

2. Évident d'après la méthode n°2 ci-dessus.

3. En posant $y_0 := \left(1, -\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $y_1 := (1, 1, 2)$ et $y_2 := (0, -1, -1)$, il vient $\ker u = \operatorname{Vect}(y_0)$ et $\operatorname{im} u = \operatorname{Vect}(y_1, y_2)$. En posant $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \varphi_1(x) := x_1 + x_2$ et $\varphi_2(x) := x_3 - x_1$, nous avons bien $u(x) = \varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2$ et nous vérifions que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont linéairement indépendantes dans $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

$\square$