Produit d'entiers naturels

Samuel Rochetin

Mercredi 6 juin 2018

Résumé

Le but de ce document est d'établir les propriétés algébriques du produit de deux entiers naturels. Nous supposons connus les algorithmes de calcul de la somme et du produit de deux entiers naturels et les propriétés de commutativité et d'associativité de la somme d'entiers naturels.

Définition 1. *Soient a, b deux entiers naturels. On définit leur produit ainsi :*

$$a \times b := \underbrace{b + \cdots + b}_{a \text{ fois}}$$

Exemple 1. $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$. *Dans cet exemple,* $a = 4, b = 3$.

Propriété 1 (Commutativité)**.** *Soient a, b deux entiers naturels.*

$$a \times b = b \times a$$

Démonstration. Considérons un tableau de a lignes et b colonnes de 1.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}$$

Sommons les 1 de deux façons différentes.

Chaque ligne compte b fois le nombre 1. Le tableau compte a lignes. Donc d'après la définition 1, la somme vaut $a \times b$.

Chaque colonne compte a fois le nombre 1. Le tableau compte b colonnes. Donc d'après la définition 1, la somme vaut $b \times a$.

Donc $a \times b = b \times a$. □

Exemple 2. $2 \times 5 = 5 \times 2 = 10$. *Dans cet exemple,* $a = 2, b = 5$.

Pour multiplier plusieurs entiers naturels, on peut décider de commencer par la droite, comme l'indiquent les parenthèses suivantes.

Définition 2. *Soient a, b, c trois entiers naturels.*

$$a \times b \times c := a \times (b \times c)$$

Exemple 3. $2 \times 3 \times 5 = 2 \times (3 \times 5) = 2 \times 15 = 30$. *Dans cet exemple,* $a = 2, b = 3, c = 5$.

En fait, en commençant par la gauche, on obtient le même résultat.

Propriété 2 (Associativité)**.** *Soient a, b, c trois entiers naturels.*

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Démonstration. Considérons un tableau de a lignes et c colonnes de b.

$$\begin{array}{cccc} b & b & \cdots & b \\ b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b \end{array}$$

Sommons les b de deux façons différentes.

Chaque colonne compte a fois le nombre b. Le tableau compte c colonnes. Donc d'après la définition 1 et la propriété 1, la somme vaut $c \times (a \times b) = (a \times b) \times c$.

Chaque ligne compte c fois le nombre b. Le tableau compte a lignes. Donc d'après la définition 1 et la propriété 1, la somme vaut $a \times (c \times b) = a \times (b \times c)$.

Donc $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. $\square$

Exemple 4. $(3 \times 2) \times 7 = 6 \times 7 = 42$ *et* $3 \times (2 \times 7) = 3 \times 14 = 42$. *Dans cet exemple,* $a = 3, b = 2, c = 7$.

Pour calculer une multiplication d'une somme d'entiers naturels par un entier naturel, on peut commencer par les parenthèses ou développer.

Propriété 3 (Distributivité et factorisation)**.** *Soient a, b, c trois entiers naturels.*

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= \underbrace{(b + c) + \cdots + (b + c)}_{a \text{ fois}} && \text{définition 1} \\ &= \underbrace{b + \cdots + b}_{a \text{ fois}} + \underbrace{c + \cdots + c}_{a \text{ fois}} && \text{associativité et commutativité} \\ &= (a \times b) + (a \times c) && \text{définition 1} \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 5. $3 \times (4 + 7) = 3 \times 11 = 33$ *et* $(3 \times 4) + (3 \times 7) = 12 + 21 = 33$. *Dans cet exemple,* $a = 3, b = 4, c = 7$.

Pour effectuer des calculs mêlant sommes et produits sans ambiguïté, on décide que la multiplication est prioritaire sur l'addition.

Définition 3 (Priorité opératoire)**.** *Soient a, b, c trois entiers naturels.*

$$a + b \times c \coloneqq a + (b \times c)$$

Exemple 6. $6 + 4 \times 5 = 6 + 20 = 26$. $\cancel{6 + 4 \times 5 = 10 \times 5 = 50}$.