Solutions bornées d'une équation différentielle

Samuel Rochetin

Samedi 21 mars 2015

Exercice. *Montrer que toute solution sur* $\mathbb{R}$ *de* $y'' + \exp(x^2)y = 0$ *est bornée.*

Solution. On note tout d'abord le lien avec l'équation de l'oscillateur harmonique $y'' + \omega_0^2 y = 0$, dont les solutions sont bornées. Le problème ici vient du coefficient non constant en exponentielle, non borné.

Résolution, changement de variable, séparation des variables, rien ne paraît évident.

On multiplie donc par $2y' \exp(-x^2)$ pour obtenir $({y'}^2)' \exp(-x^2) + 2yy' = 0$, le terme en exponentielle décroissante facilitant le travail sur les fonctions bornées. On intègre entre 0 et $t \in \mathbb{R}$: $\int_0^t ({y'}^2(x))' \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x + y^2(t) - y^2(0) = 0$. Une intégration par parties donne : $\int_0^t ({y'}^2(x))' \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = {y'}^2(t)\exp(-t^2) - {y'}^2(0) + 2\int_0^t x{y'}^2(x)\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$. Ceci est possible car y' est continue car dérivable, donc la dernière intégrale a un sens.

On remarque que le terme de la dernière intégrale est du signe de x, et que t et x sont de même signe. On a donc $\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t x{y'}^2(x)\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x \geq 0$. Donc $\int_0^t ({y'}^2(x))' \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x \geq {y'}^2(t)\exp(-t^2) - {y'}^2(0)$. En utilisant ${y'}^2(t)\exp(-t^2) \geq 0$, on obtient au final : $\forall t \in \mathbb{R}, y^2(t) \leq y^2(0) + {y'}^2(0)$. $\square$