Khôlle d'analyse

Samuel Rochetin

Dimanche 18 février 2018

Exercice. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ *vérifiant* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1)f(x-1) = f(x)$*. Montrer que* f *est périodique.*

Solution. Exprimons $\dfrac{f(x)}{f(x+1)}$ de deux façons différentes.

Tout d'abord, puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, il vient $\dfrac{f(x)}{f(x+1)} = f(x-1)$.

Ensuite, en remplaçant x par $x+1$ dans l'équation fonctionnelle de départ, par arbitraire sur x, il vient $\dfrac{f(x)}{f(x+1)} = \dfrac{1}{f(x+2)}$.

Donc $f(x-1) = \dfrac{1}{f(x+2)} \iff f(x-1)f(x+2) = 1$.

En remplaçant x par $x+1$ puis par $x-2$ dans cette dernière égalité, nous obtenons $f(x)f(x+3) = 1$ puis $f(x-3)f(x) = 1$.

Par quotient, nous obtenons $\dfrac{f(x+3)}{f(x-3)} = 1 \iff f(x+3) = f(x-3)$.

Enfin, en remplaçant x par $x+3$ dans cette dernière égalité, nous obtenons $f(x+6) = f(x)$.

Par arbitraire sur x, nous en déduisons que $\boxed{f \text{ est 6-périodique.}}$ $\square$