Équation fonctionnelle intégrale

Samuel Rochetin

Dimanche 1er mai 2016

Énoncé. *Déterminer les applications continues* $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ *telles que*

$$\int_0^1 \left(f\left(x^2\right)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}$$

Solution. Nous remarquons tout d'abord que

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$$

Soit f une application vérifiant les conditions et l'équation de l'énoncé. L'application $t \mapsto t^2$ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0;1]$ dans $[0;1]$. Le changement de variable $x = t^2$ permet alors d'écrire

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2tf\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t$$

Les variables x et t étant muettes, nous pouvons écrire

$$\int_0^1 2tf\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2xf\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x$$

Par linéarité de l'intégrale, la fonction f vérifie

$$\int_0^1 \left(\left(f\left(x^2\right)\right)^2 - 2xf\left(x^2\right) + x^2\right)\mathrm{d}x = 0$$

C'est-à-dire

$$\int_0^1 \left(f\left(x^2\right) - x\right)^2 \mathrm{d}x = 0$$

Or, la fonction $x \mapsto \left(f\left(x^2\right) - x\right)^2$ est continue sur $[0;1]$ (par opérations sur des fonctions continues) et positive, donc $\forall x \in [0;1], \left(f\left(x^2\right) - x\right)^2 = 0$, c'est-à-dire $f\left(x^2\right) = x$. L'image par f d'un réel x^2 de $[0;1]$ est sa racine carrée x (car x est positif), donc si f vérifie les conditions et l'équation de l'énoncé, alors $\forall x \in [0;1], f(x) = \sqrt{x}$.

Réciproquement, nous vérifions que l'application définie par $\forall x \in [0;1], f(x) = \sqrt{x}$ est continue et que

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{3} = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}$$

L'unique solution est donc l'application définie par $\forall x \in [0;1], f(x) = \sqrt{x}$.

$\square$