

Équation fonctionnelle, quantificateurs

Samuel Rochetin

Lundi 23 septembre 2013

Exercice. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f \times f = f$.

Solution. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)(f(x) - 1) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$.

Donc f ne peut prendre que deux valeurs.

Supposons que $\exists x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) = 0$ et $\exists x_2 \in \mathbb{R}, f(x_2) = 1$.

Alors f n'est pas continue.

Contradiction.

Donc $\forall x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) = 1$ ou $\forall x_2 \in \mathbb{R}, f(x_2) = 0$.

Réciproquement, on vérifie que la fonction identiquement nulle et la fonction constante égale à 1 sont solutions du problème. \square