Équation fonctionnelle, involution

Samuel Rochetin

Lundi 23 septembre 2013

Exercice. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f \circ f = Id$.

1. *Montrer que la courbe représentative de* f *admet un axe de symétrie.*
2. *Montrer que si* f *est continue, alors* f *est strictement monotone.*
3. *Déterminer les fonctions* f *croissantes solutions du problème.*

Solution.

1. Soit (x, y) un point de la représentation graphique de f.
   Le point $(y, f(y)$ appartient à la représentation graphique de f.
   Or, $(y, f(y)) = (y, f \circ f(x)) = (y, x)$.
   Donc la courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.
2. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f(x_1) = f(x_2)$.
   Alors $f \circ f(x_1) = f \circ f(x_2) \iff x_1 = x_2$.
   Donc f est injective et continue.
   Donc f est strictement monotone.
3. Supposons que $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x$.
   Alors $f(x) < x$ ou $f(x) > x$.
   Si $f(x) < x$, alors par croissance de f, $x = f \circ f(x) < f(x)$.
   Contradiction.
   Même principe si $f(x) > x$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.
   Réciproquement, la fonction identité est croissante et solution du problème.

$\square$