Khôlle d'algèbre

Samuel Rochetin

Vendredi 2 février 2018

Exercice. *Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles convergentes. Soient F et G respectivement l'ensemble des suites réelles de limite nulle et l'ensemble des suites réelles constantes. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.*

Solution. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E. Tout d'abord, $F \subset E$. Ensuite, F contient la suite nulle. Enfin, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u,v) \in F^2, \lambda u + v \in F$ par opérations sur les limites.

De même, montrons que G est un sous-espace vectoriel de E. Tout d'abord, $G \subset E$. Ensuite, G contient la suite nulle. Enfin, il est clair que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u,v) \in G^2, \lambda u + v \in G$.

Montrons que F et G sont supplémentaires dans E. La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E donc $F + G \subset E$. Réciproquement, soit $u \in E$ de limite l. Écrivons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_n - l) + l$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, v_n := u_n - l$ et $w_n := l$. Nous avons $u = v + w$, $v \in F$ et $w \in G$ donc $E \subset F + G$. Donc $\boxed{E = F + G.}$ Enfin, soit $u \in F \cap G$. Il est clair que u est la suite nulle puisque constante et de limite nulle. Réciproquement, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E donc contient la suite nulle. Donc $\boxed{F \cap G = \{0\}.}$

Donc $\boxed{E = F \oplus G.}$ $\square$