Khôlle d'algèbre

Samuel Rochetin

Vendredi 2 février 2018

Exercice. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0$.*

1. *Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.*
2. *Soient $F := \ker(f - Id)$ et $G := \ker(f - 2Id)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.*

Solution.

1. Posons $g := \frac{1}{2}(3Id - f)$. Nous vérifions que g est un endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f = Id$. Donc f est inversible d'inverse g.
2. F et G sont des sous-espaces vectoriels de E comme noyaux d'endomorphismes de E donc leur somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E donc $F + G \subset E$. Réciproquement, montrons que $E \subset F + G$. Remarquons que $f^2 - 3f + 2Id = 0 \iff (f - Id) \circ (f - 2Id) = 0 \iff (f - 2Id) \circ (f - Id) = 0$ car deux polynômes en f commutent. Donc $\mathrm{im}(f - 2Id) \subset \ker(f - Id)$ et $\mathrm{im}(f - Id) \subset \ker(f - 2Id)$. Soit $x \in E$. Écrivons $x = -(f(x) - 2x) + f(x) - x$. Posons $u := -(f(x) - 2x)$ et $v := f(x) - x$. Nous avons $x = u + v$, $u = f(-x) - 2(-x) \in \mathrm{im}(f - 2Id)$ donc $u \in \ker(f - Id)$ et $v \in \mathrm{im}(f - Id)$ donc $v \in \ker(f - 2Id)$ donc $E \subset F + G$. Donc $\boxed{E = F + G.}$ Enfin, soit $x \in F \cap G$. Alors $f(x) = x$ et $f(x) = 2x$ donc $x = 2x$, c'est-à-dire $x = 0$. Réciproquement $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E donc contient le vecteur nul. Donc $\boxed{F \cap G = \{0\}.}$

   Donc $\boxed{E = F \oplus G.}$

$\square$