

Première S

Devoir de recherche

Samuel Rochetin

Jeudi 15 novembre 2012

Résumé

Le but de ce devoir est d'encadrer $n!$, ce qui est utile pour étudier des ordres de grandeur lorsque n est infiniment grand.

Problème. Soient $n \in \mathbb{N}$ et la fonction

$$f : \begin{array}{l} [0; n+1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -x(x - (n+1)) \end{array} .$$

1. Étudier f en précisant les valeurs de $f(1)$ et $f(n)$ dans le tableau de variations.
2. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, n \leq f(k) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.
3. Montrer que $(n!)^2 = f(1) \times f(2) \times \cdots \times f(n)$.
4. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^n} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.