Fonctions affines et linéaires

Samuel Rochetin

Mercredi 6 juin 2018

1 Définitions et propriétés algébriques

1.1 Fonctions affines

Définition 1. *On dit que f est une **fonction affine** s'il existe deux réels a, b appelés respectivement **coefficient directeur** et **ordonnée à l'origine** tels que pour tout réel x,*

$$\boxed{f(x) = ax + b.}$$

Propriété 1. *Soit f une fonction affine.*

$$\boxed{\textit{Le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de } f \textit{ sont uniques.}}$$

Démonstration. Supposons qu'il existe quatre réels a_1, a_2, b_1 et b_2 tels que pour tout réel x, $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$. En particulier pour $x = 0$, il vient $a_1 \times 0 + b_1 = a_2 \times 0 + b_2 \iff b_1 = b_2$. Donc pour tout réel x, $a_1x + b_1 = a_2x + b_1 \iff a_1x = a_2x$. En particulier pour $x = 1$, il vient $a_1 \times 1 = a_2 \times 1 \iff a_1 = a_2$. □

Exemple 1. *Si pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{5x}{6} - 4$, alors f est une fonction affine de coefficient directeur $\dfrac{5}{6}$ et d'ordonnée à l'origine -4.*

Exemple 2. *Si pour tout réel x, $g(x) = -x$, alors g est une fonction affine de coefficient directeur -1 et d'ordonnée à l'origine 0.*

Exemple 3. *Si pour tout réel x, $h(x) = 3$, alors h est une fonction affine de coefficient directeur 0 et d'ordonnée à l'origine 3.*

Propriété 2. *Soit f une fonction affine d'ordonnée à l'origine b.*

$$\boxed{b = f(0)}$$

Démonstration. Notons a le coefficient directeur de f. Pour tout réel $x, f(x) = ax + b$. En particulier pour $x = 0$, il vient $f(0) = a \times 0 + b = b$. □

Remarque 1. *Ainsi, b est l'image de 0 par la fonction f, d'où l'appellation d'ordonnée à l'origine.*

Propriété 3. *Soit f une fonction affine de coefficient directeur a. Soient x_1, x_2 deux réels distincts.*

$$\boxed{a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}$$

Démonstration. Notons b l'ordonnée à l'origine de f. Nous avons $f(x_1) = ax_1 + b$ et $f(x_2) = ax_2 + b$ donc par soustraction, il vient :

$$\begin{aligned}
& f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - (ax_2 + b) & \\
\iff\ & f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - ax_2 - b & \text{développement} \\
\iff\ & f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2) & \text{réduction, factorisation} \\
\iff\ & \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a & \text{division par } x_1 - x_2 \neq 0
\end{aligned}$$

□

Exemple 4. *Soit f une fonction affine telle que $f(1) = 2$ et $f(-1) = 3$. Déterminer une expression de f.*

Solution. D'après la propriété 1, il existe un unique réel a et un unique réel b tels que pour tout réel x, $f(x) = ax + b$. Dans cet exemple, $x_1 = 1, x_2 = -1$. D'après la propriété 3, $a = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2 - 3}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$ donc pour tout réel x, $f(x) = -\frac{x}{2} + b$. En particulier pour $x = 1$, il vient $f(1) = -\frac{1}{2} + b \iff 2 = -\frac{1}{2} + b \iff b = \frac{5}{2}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$. □

1.2 Fonctions linéaires

Définition 2. *Soit f une fonction affine de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b. On dit que f est une* ***fonction linéaire*** *si $b = 0$, c'est-à-dire si pour tout réel x,*

$$\boxed{f(x) = ax.}$$

Exemple 5. *La fonction g de l'exemple 2 est une fonction linéaire.*

Propriété 4. *Soit f une fonction linéaire.*

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Démonstration. D'après la propriété 2 et la définition 2, $f(0) = b = 0$. □

Propriété 5. *Soit f une fonction linéaire.*

$$\boxed{\textit{Tout tableau de valeurs de } f \textit{ est un tableau de proportionnalité.}}$$

Démonstration. Notons a le coefficient directeur de f. D'après la définition 2, la deuxième ligne de tout tableau de valeurs de f est obtenue en multipliant la première ligne par a. C'est donc un tableau de proportionnalité. □

Exemple 6. *Soit f la fonction linéaire définie pour tout réel x par $f(x) = 2x$. Le tableau de valeurs de f de valeur initiale -1, de valeur finale 1 et de pas $0{,}5$ est un tableau de proportionnalité. La deuxième ligne est obtenue en multipliant la première ligne par 2.*

x	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

1.3 Fonctions constantes

Définition 3. *On dit que f est une* ***fonction constante*** *s'il existe un réel b tel que pour tout réel x,*

$$\boxed{f(x) = b.}$$

Si $b = 0$, on dit que f est la ***fonction identiquement nulle****.*

Exemple 7. *La fonction h de l'exemple 3 est une fonction constante.*

Remarque 2. *Toute fonction constante est une fonction affine de coefficient directeur nul.*

2 Représentation graphique

2.1 Fonctions constantes

Propriété 6. *Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère du plan.*

$$\boxed{f \text{ est constante } \iff \mathscr{C}_f \text{ est une droite parallèle à l'axe des abscisses}}$$

Démonstration. Soit b un réel. Soit f la fonction constante définie pour tout réel x par $f(x) = b$. Soit $M(x, y)$ un point du plan. $M \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x) \iff y = b$. En particulier $f(0) = b$ donc $\mathscr{C}_f$ est la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(0; b)$. □

Exemple 8. *Dans cet exemple, $b = \dfrac{3}{2}$.*

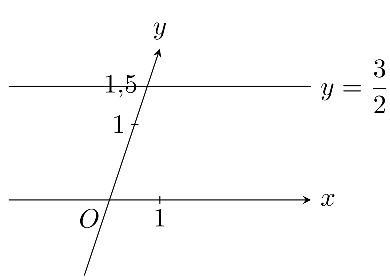

FIGURE 1 – Représentation graphique d'une fonction constante

2.2 Fonctions linéaires

Propriété 7. *Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère du plan.*

$$\boxed{f \text{ est linéaire} \iff \mathscr{C}_f \text{ est une droite passant par l'origine}}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que si f est linéaire, alors $\mathscr{C}_f$ est une droite passant par l'origine. D'après la propriété 4, $O(0;0) \in \mathscr{C}_f$. Notons a le coefficient directeur de f. Si $a = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle et sa représentation graphique est bien une droite passant par l'origine. Supposons $a \neq 0$. Soit $A(1;a) \in \mathscr{C}_f$. Pour tout réel x tel que $x \neq 0$ et $x \neq 1$, soit $M(x, ax) \in \mathscr{C}_f$. Montrons que les trois points distincts O, A, M sont alignés. Soient $B(1;0)$ et $N(x;0)$ les projetés respectifs de A et M sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées. Nous avons $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{ax}{a} = \dfrac{x}{1} = \dfrac{ON}{OB}$ et $\widehat{OBA} = \widehat{ONM}$. Or, deux triangles sont semblables si deux côtés de l'un sont proportionnels à deux côtés de l'autre et si les angles entre ces deux côtés sont égaux. Donc les triangles OBA et ONM sont semblables. Donc $\widehat{BOA} = \widehat{NOM}$. Ainsi, les points O, A, M sont alignés donc $\mathscr{C}_f$ est une droite passant par l'origine.

Réciproquement, montrons que si $\mathscr{C}_f$ est une droite passant par l'origine, alors f est linéaire. Notons a l'ordonnée du point A d'abscisse 1 tel que $A(1;a) \in \mathscr{C}_f$. Si $a = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle donc f est bien linéaire. Supposons $a \neq 0$. Soit $M(x, y) \in \mathscr{C}_f$. Soient $B(1;0)$ et $N(x;0)$ les projetés respectifs de A et M sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées. Les points O, A, M et O, B, N sont alignés dans cet ordre et $(AB) \parallel (MN)$ donc d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{ON}{OB} \iff \dfrac{y}{a} = \dfrac{x}{1} \iff y = ax \iff f(x) = ax$ donc f est linéaire. □

Exemple 9. *Dans cet exemple, $a = \dfrac{1}{2}$.*

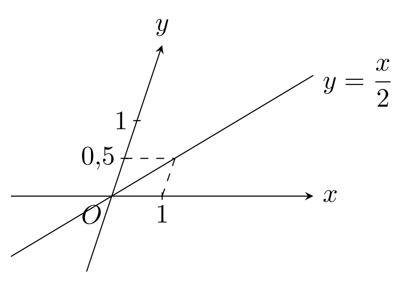

FIGURE 2 – Représentation graphique d'une fonction linéaire

2.3 Fonctions affines

Propriété 8. *Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère du plan.*

$$\boxed{f \text{ est affine} \iff \mathscr{C}_f \text{ est une droite}}$$

Démonstration. Supposons que f est affine et notons b son ordonnée à l'origine. D'après la propriété 2, $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en $(0; b)$. Reprenons la preuve de la propriété 7 : en considérant cette fois-ci le point $A(1; a+b)$ et les projetés sur la droite d'équation $y = b$ parallèlement à l'axe des ordonnées, nous déduisons que si f est affine, alors $\mathscr{C}_f$ est une droite passant par le point de coordonnées $(0; b)$.

Même principe pour la réciproque. □

Exemple 10. *Dans cet exemple, $a = -\dfrac{1}{3}, b = 1$.*

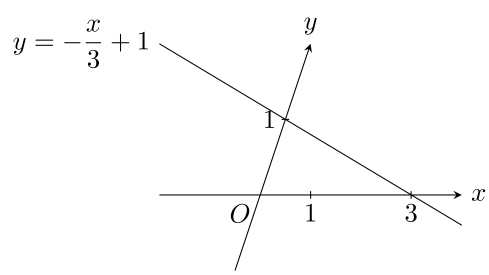

FIGURE 3 – Représentation graphique d'une fonction affine