Khôlle d'analyse

Samuel Rochetin

Mardi 23 janvier 2018

Exercice. *Soient f et g deux fonctions continues de $[0;1]$ dans $[0;1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$ (on dit que f et g commutent). Montrer que $\exists \alpha \in [0;1], f(\alpha) = g(\alpha)$.*

Solution. Posons $\forall x \in [0;1], h(x) := f(x) - g(x)$.

Supposons que h ne s'annule pas sur $[0;1]$. Or, h est continue sur $[0;1]$ comme somme de fonctions continues donc il suffit d'appliquer la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires en raisonnant par l'absurde pour montrer que h est de signe constant sur $[0;1]$.

Supposons que $\forall x \in [0;1], h(x) > 0$. Or, h est continue sur $[0;1]$ donc h est bornée sur $[0;1]$ et atteint ses bornes. En particulier, h atteint son minimum strictement positif. Donc $\exists a > 0, \forall x \in [0;1], h(x) \geq a$ (I1).

Particularisons cette inégalité. $\forall t \in [0;1], f(t) \in [0;1]$ et $g(t) \in [0;1]$ donc $\forall t \in [0;1], h \circ f(t) \geq a$ et $h \circ g(t) \geq a$, c'est-à-dire $f^2(t) - g \circ f(t) \geq a$ et $f \circ g(t) - g^2(t) \geq a$, où la puissance désigne la composition des fonctions. En sommant ces deux dernières inégalités et en utilisant l'hypothèse sur f et g, il vient $\forall t \in [0;1], f^2(t) - g^2(t) \geq 2a$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], f^n(x) - g^n(x) \geq na$. Initialisation : vérifiée par hypothèse sur h. Hérédité : supposons que $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], f^n(x) - g^n(x) \geq na$. Particularisons cette inégalité. $\forall t \in [0;1], g(t) \in [0;1]$ donc $\forall t \in [0;1], f^n \circ g(t) - g^{n+1}(t) \geq na$ (I2). Particularisons l'inégalité (I1). $\forall t \in [0;1], f^n(t) \in [0;1]$ donc $\forall t \in [0;1], f^{n+1}(t) - g \circ f^n(t) \geq a$ (I3). Or, f et g commutent donc $f^n \circ g = f^{n-1} \circ f \circ g = f^{n-1} \circ g \circ f = \cdots = g \circ f^n$. Donc en sommant les inégalité (I2) et (I3), il vient $\forall t \in [0;1], f^{n+1}(t) - g^{n+1}(t) \geq (n+1)a$. L'hérédité est démontrée.

$a > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} na = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison des limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} f^n - g^n = +\infty$. Or, d'après l'inégalité triangulaire, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], |f^n(x) - g^n(x)| \leq |f^n(x)| + |g^n(x)| \leq 2$ car $f^n(x) \in [0;1]$ et $g^n(x) \in [0;1]$. Contradiction.

Même principe si nous supposons que $\forall x \in [0;1], h(x) < 0$. Donc $\exists \alpha \in [0;1], h(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\exists \alpha \in [0;1], f(\alpha) = g(\alpha)$. $\square$