Les fractions en 6$^{\text{e}}$

Samuel Rochetin

Mercredi 6 juin 2018

1 Définition et première propriété

Définition 1. *Soient a, b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$. On appelle **fraction** de **numérateur** a et de **dénominateur** b et on note $\frac{a}{b}$ le quotient de a par b.*

$$\boxed{\frac{a}{b} \coloneqq a \div b}$$

Remarque 1. *En partageant a en b parts égales, chaque part vaut $\frac{a}{b}$.*

Exemple 1. *En partageant 3 en 4 parts égales, chaque part vaut $\frac{3}{4} = 3 \div 4 =$ 0,75. Dans cet exemple, $a = 3, b = 4$.*

Propriété 1. *Soient a, b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$.*

$$\boxed{b \times \frac{a}{b} = a}$$

Démonstration. D'après la définition 1, $b \times \frac{a}{b} = b \times (a \div b) = a$. □

Remarque 2. *Autrement dit, multiplier une fraction par son dénominateur renvoie son numérateur.*

Exemple 2. $7 \times \frac{2}{7} = 2$. *Dans cet exemple, $a = 2, b = 7$.*

Exemple 3. $b \times \frac{1}{b} = 1$. *Dans cet exemple, $a = 1, b \neq 0$.*

2 Produit par un entier naturel

Propriété 2. *Soient a, b, c trois entiers naturels tels que $c \neq 0$.*

$$\boxed{a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& b\times a = a\times b && \text{commutativité}\\
\iff\ & \left(c\times\frac{b}{c}\right)\times a = c\times\frac{a\times b}{c} && \text{propriété 1.1}\\
\iff\ & c\times\left(a\times\frac{b}{c}\right) = c\times\frac{a\times b}{c} && \text{associativité, commutativité}\\
\iff\ & \frac{1}{c}\times\left(c\times\left(a\times\frac{b}{c}\right)\right) = \frac{1}{c}\times\left(c\times\frac{a\times b}{c}\right) && \text{multiplication par } \frac{1}{c}\\
\iff\ & \left(c\times\frac{1}{c}\right)\times\left(a\times\frac{b}{c}\right) = \left(c\times\frac{1}{c}\right)\times\frac{a\times b}{c} && \text{associativité, commutativité}\\
\iff\ & 1\times\left(a\times\frac{b}{c}\right) = 1\times\left(\frac{a\times b}{c}\right) && \text{exemple 1.3}\\
\iff\ & a\times\frac{b}{c} = \frac{a\times b}{c}
\end{aligned}$$

□

Exemple 4. $2\times\frac{3}{17} = \frac{2\times 3}{17} = \frac{6}{17}$. *Dans cet exemple, $a = 2, b = 3, c = 17$.*

Remarque 3. *Autrement dit, multiplier une fraction par un entier naturel revient à multiplier son numérateur par cet entier naturel.*

Exemple 5. $\frac{a}{c} = \frac{a\times 1}{c} = a\times\frac{1}{c}$. *Dans cet exemple, $b = 1, c \neq 0$.*

3 Lecture de fractions

Définition 2. *On appelle **fraction unitaire** toute fraction dont le numérateur est égal à 1.*

Exemple 6. $\frac{1}{7}$ *est une fraction unitaire.*

Définition 3 (Lecture de fractions unitaires)**.** *Le dénominateur sert à nommer toute fraction unitaire : $\frac{1}{1}$ se lit « un », $\frac{1}{2}$ se lit « un demi », $\frac{1}{3}$ se lit « un tiers », $\frac{1}{4}$ se lit « un quart ». À partir de 5, on utilise les adjectifs numéraux ordinaux. Ainsi, $\frac{1}{5}$ se lit « un cinquième », et ainsi de suite.*

Remarque 4. *D'après l'exemple 5, toute fraction se décompose comme produit du numérateur par une fraction unitaire ; le numérateur indique combien de fois est comptée cette fraction unitaire.*

Définition 4 (Lecture de fractions)**.** *Toute fraction se lit en lisant le numérateur puis la fraction unitaire de la décomposition de l'exemple 5, sans lire « un », en accordant.*

Exemple 7. $\frac{8}{9} = 8 \times \frac{1}{9}$ *donc la fraction unitaire* $\frac{1}{9}$ *est comptée* 8 *fois donc* $\frac{8}{9}$ *se lit « huit neuvièmes ». De même,* $\frac{15}{4}$ *se lit « quinze quarts ».*

4 Égalité et simplification de fractions

Propriété 3 (Produit en croix)**.** *Soient* a, b, c, d *quatre entiers naturels tels que* $b \neq 0$ *et* $d \neq 0$.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \\
\iff & b \times \frac{a}{b} = b \times \frac{c}{d} & \text{multiplication par } b \\
\iff & a = b \times \frac{c}{d} & \text{propriété 1.1} \\
\iff & a \times d = \left(b \times \frac{c}{d}\right) \times d & \text{multiplication par } d \\
\iff & a \times d = b \times \left(d \times \frac{c}{d}\right) & \text{associativité, commutativité} \\
\iff & a \times d = b \times c & \text{propriété 1.1}
\end{aligned}$$

□

Exemple 8. *Les fractions* $\frac{15}{14}$ *et* $\frac{12}{11}$ *sont-elles égales ?* $15 \times 11 = 165$ *et* $14 \times 12 = 168$. *Or,* $165 \neq 168$ *donc* $\frac{15}{14} \neq \frac{12}{11}$. *Dans cet exemple,* $a = 15, b = 14, c = 12, d = 11$.

Exemple 9. *Les fractions* $\frac{5}{7}$ *et* $\frac{15}{21}$ *sont-elles égales ?* $5 \times 21 = 105$ *et* $7 \times 15 = 105$. *Ainsi,* $5 \times 21 = 7 \times 15$ *donc* $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$. *Dans cet exemple,* $a = 5, b = 7, c = 15, d = 21$.

Propriété 4 (Simplification)**.** *Soient* a, b, c *trois entiers naturels tels que* $b \neq 0$ *et* $c \neq 0$.

$$\boxed{\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& a \times (b \times c) = (b \times c) \times a & \text{commutativité} \\
\iff & (a \times c) \times b = (b \times c) \times a & \text{commutativité, associativité} \\
\iff & \frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b} & \text{propriété 1.3}
\end{aligned}$$

□

Remarque 5. *Simplifier une fraction revient à trouver le plus grand entier naturel c divisant son numérateur et son dénominateur. Si $c = 1$, alors la fraction est déjà simplifiée.*

Exemple 10. $\dfrac{42}{54} = \dfrac{7 \times 6}{9 \times 6} = \dfrac{7}{9}$. *Dans cet exemple, $a = 7, b = 9, c = 6$.*

Exemple 11. $\dfrac{15}{14} = \dfrac{15 \times 1}{14 \times 1} = \dfrac{15}{14}$. *Dans cet exemple, $a = 15, b = 14, c = 1$. La fraction $\dfrac{15}{14}$ est déjà simplifiée.*

Définition 5 (Écriture d'une valeur exacte)**.** *Si une fraction est égale à un nombre :*

- *entier, alors on l'écrit en écriture décimale ;*
- *décimal non entier, alors on l'écrit en écriture fractionnaire simplifiée puis en écriture décimale ;*
- *non décimal, alors on l'écrit en écriture fractionnaire simplifiée.*

Exemple 12. *On écrit* $\dfrac{51}{17} = 3$ *car* $51 \div 17 = 3$ *est un nombre entier. On écrit* $\dfrac{27}{24} = \dfrac{9 \times 3}{8 \times 3} = \dfrac{9}{8} = 1{,}125$ *car* $9 \div 8 = 1{,}125$ *est un nombre décimal non entier. On écrit* $\dfrac{16}{26} = \dfrac{8 \times 2}{13 \times 2} = \dfrac{8}{13}$ *car* $8 \div 13 = 0{,}615384615384\ldots$ *n'est pas un nombre décimal.*

5 Somme de fractions

Propriété 5. *Soient a, b, c trois entiers naturels tels que $c \neq 0$.*

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= a \times \frac{1}{c} + b \times \frac{1}{c} && \text{exemple 1.5} \\ &= (a+b) \times \frac{1}{c} && \text{factorisation} \\ &= \frac{a+b}{c} && \text{exemple 1.5} \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 13. $\dfrac{2}{11} + \dfrac{7}{11} = \dfrac{2+7}{11} = \dfrac{9}{11}$. *Dans cet exemple, $a = 2, b = 7, c = 11$.*

Exemple 14 (Utilisation de la propriété 5 puis de la propriété 4)**.**

$$\begin{aligned}\frac{19}{30}+\frac{5}{30} &= \frac{19+5}{30}\\ &= \frac{24}{30}\\ &= \frac{4\times 6}{5\times 6}\\ &= \frac{4}{5}\\ &= 0{,}8\end{aligned}$$

6 Produit par un nombre réel

Propriété 6. *Soient a, b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$. Soit x un nombre réel.*

$$\boxed{x \times \frac{a}{b} = a \times (x \div b)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& 1 \times x = b \times (x \div b) && \text{définition du quotient}\\
\iff & \left(b \times \frac{1}{b}\right) \times x = b \times (x \div b) && \text{exemple 1.3}\\
\iff & b \times \left(\frac{1}{b} \times x\right) = b \times (x \div b) && \text{associativité}\\
\iff & \frac{1}{b} \times \left(b \times \left(\frac{1}{b} \times x\right)\right) = \frac{1}{b} \times (b \times (x \div b)) && \text{multiplication par } \frac{1}{b}\\
\iff & \left(b \times \frac{1}{b}\right) \times \left(\frac{1}{b} \times x\right) = \left(b \times \frac{1}{b}\right) \times (x \div b) && \text{associativité, commutativité}\\
\iff & 1 \times \left(\frac{1}{b} \times x\right) = 1 \times (x \div b) && \text{exemple 1.3}\\
\iff & a \times \left(\frac{1}{b} \times x\right) = a \times (x \div b) && \text{multiplication par } a\\
\iff & x \times \left(a \times \frac{1}{b}\right) = a \times (x \div b) && \text{associativité, commutativité}\\
\iff & x \times \frac{a}{b} = a \times (x \div b) && \text{exemple 1.5}
\end{aligned}$$

□

Exemple 15.

$$\begin{aligned}
\pi \times \frac{5}{7} &= 5 \times (\pi \div 7) \\
&= 2{,}24399475\ldots && \textit{affiché par une calculatrice} \\
&= 2{,}24 && \textit{arrondi au centième}
\end{aligned}$$

Dans cet exemple, $a = 5, b = 7, x = \pi$.

7 Fraction d'une quantité

Définition 6. *Soient* a, b *deux entiers naturels tels que* $b \neq 0$*. Calculer la fraction* $\frac{a}{b}$ *d'une quantité* x*, c'est calculer la valeur de* a *parts du partage de* x *en* b *parts égales.*

Exemple 16. *Calculer* $\frac{7}{3}$ *de* 4,2 L*, c'est calculer la valeur de* 7 *parts du partage de* 4,2 L *en* 3 *parts égales. En partageant* 4,2 L *en* 3 *parts égales, chaque part vaut* $4{,}2\ \mathrm{L} \div 3 = 1{,}4\ \mathrm{L}$ *donc* 7 *parts valent* $7 \times 1{,}4\ \mathrm{L} = 9{,}8\ \mathrm{L}$*. Dans cet exemple,* $a = 7, b = 3, x = 4{,}2\ \mathrm{L}$.

Propriété 7. *Soient* a, b *deux entiers naturels tels que* $b \neq 0$.

$$\boxed{\textit{Calculer la fraction } \frac{a}{b} \textit{ d'une quantité } x\textit{, c'est calculer } \frac{a}{b} \times x.}$$

Démonstration. Par définition du quotient, la valeur d'une part du partage de x en b parts égales est $x \div b$. Donc la valeur de a parts est $a \times (x \div b)$. D'après la propriété 6 et par commutativité, il vient $a \times (x \div b) = x \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times x$. □

Exemple 17. $\frac{4}{5}$ *de* 7,3 km *est égal à* $\frac{4}{5} \times 7{,}3\ \mathrm{km} = 4 \times (7{,}3 \div 5)\ \mathrm{km} = 5{,}84\ \mathrm{km}$*.* *Dans cet exemple,* $a = 4, b = 5, x = 7{,}3\ \mathrm{km}$.

8 Représentation graphique

Définition 7 (Demi-droite graduée)**.** *Soient* O, I *deux points distincts du plan. On appelle* ***demi-droite graduée d'origine*** O *et d'****unité de longueur*** OI *la demi-droite* $[OI)$ *graduée en reportant la longueur* OI *depuis l'origine.*

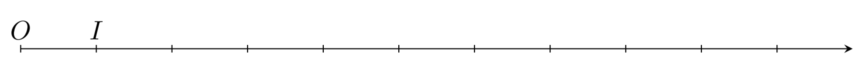

FIGURE 1 – Demi-droite graduée d'origine O et d'unité de longueur OI

Définition 8 (Abscisse d'un point)**.** *Soient O, I deux points distincts du plan. Soit $A \in [OI)$. On appelle* ***abscisse*** *du point A sur la demi-droite graduée d'origine O et d'unité de longueur OI le nombre x tel que $OA = x \times OI$. On note $A(x)$ le point A d'abscisse x.*

Propriété 8.

$$\boxed{\textit{Le point } O \textit{ a pour abscisse } 0. \textit{ Le point } I \textit{ a pour abscisse } 1.}$$

Démonstration. $OO = 0 = 0 \times OI$ et $OI = 1 \times OI$. □

Exemple 18. *Dans cet exemple, $x = 8$ donc placer $A(8)$, c'est reporter 8 fois la longueur OI depuis l'origine.*

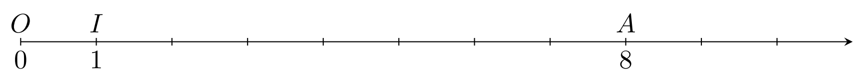

FIGURE 2 – Placement de $A(8)$

Propriété 9 (Abscisse fractionnaire)**.** *Soient a, b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$.*

$$\boxed{\textit{Placer } A\left(\frac{a}{b}\right), \textit{ c'est reporter } a \textit{ fois la longueur } OI \div b \textit{ depuis l'origine.}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} OA &= \frac{a}{b} \times OI && \text{définition 1.8} \\ &= OI \times \frac{a}{b} && \text{commutativité} \\ &= a \times (OI \div b) && \text{propriété 1.6} \end{aligned}$$

□

Exemple 19. *Dans cet exemple, $a = 7, b = 3$ donc placer $A\left(\frac{7}{3}\right)$, c'est reporter 7 fois la longueur $OI \div 3$ depuis l'origine.*

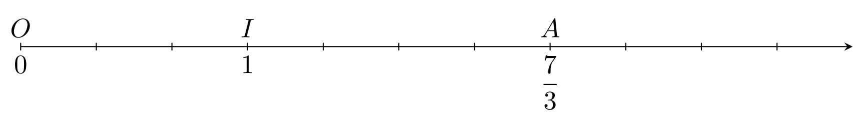

FIGURE 3 – Placement de $A\left(\frac{7}{3}\right)$