Fractions égyptiennes

Samuel Rochetin

Mercredi 6 décembre 2017

Exercice. *On appelle fraction unitaire toute fraction de la forme* $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. *Les Égyptiens décomposaient toute fraction en somme de fractions unitaires distinctes.*

1. *Décomposer de trois façons différentes* $\frac{3}{7}$ *en somme de fractions unitaires distinctes.*
2. *Décomposer* $\frac{3}{7}$ *en différence de deux fractions unitaires distinctes.*
3. *Montrer que* $\frac{3}{7}$ *ne peut pas se décomposer en somme de deux fractions unitaires distinctes.*

Solution.

1. Tout d'abord, $\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ n'est pas une décomposition convenable car les fractions ne sont pas distinctes.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{7} &= \frac{1}{7} + \frac{2}{7} \\
&= \frac{1}{7} + \frac{8}{28} \\
&= \frac{1}{7} + \frac{7+1}{28} \\
&= \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{7} &= \frac{14+1}{35} \\
&= \frac{2}{5} + \frac{1}{35} \\
&= \frac{5+1}{15} + \frac{1}{35} \\
&= \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35}}
\end{aligned}$$

Remarquons que $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$. En reprenant la deuxième ligne du calcul précédent avec $n = 5$, il vient $\frac{3}{7} = \boxed{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{35}.}$

2.

$$\begin{aligned} & 7 = 3 \times 2 + 1 \\ \iff & 3 = \frac{7-1}{2} \\ \iff & \frac{3}{7} = \frac{7-1}{7 \times 2} \\ \iff & \frac{3}{7} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{14}} \end{aligned}$$

3. Supposons que $\exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2, a \neq b, \frac{3}{7} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Nous avons $3ab = 7(a+b)$ donc $7 \mid 3ab$. Or, $7 \wedge 3 = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, $7 \mid ab$. Or, 7 est premier donc d'après le lemme d'Euclide, $7 \mid a$ ou $7 \mid b$. Supposons que $7 \mid a$. Par définition et puisque $a \neq 0$, $\exists k \in \mathbb{N}^*, a = 7k$. En reportant et en factorisant par b, il vient $7k = (3k-1)b$. Or, $\forall k \in \mathbb{N}^*, 7k = (3k-1) \times 2 + k + 2$. En reportant et en factorisant par $3k-1$, il vient $k + 2 = (3k-1)(b-2)$. Donc $3k - 1 \mid k + 2$. Or, $k \in \mathbb{N}^*$ donc $3k - 1 \geq 0$ et $k + 2 \geq 0$. Donc $3k - 1 \leq k + 2 \iff k \leq \frac{3}{2} \iff k = 1$ car $k \in \mathbb{N}^*$. En reportant, il vient $7 = 2b$ donc 7 est pair. Contradiction. De même si nous supposons $7 \mid b$, par symétrie du problème en a et b. Ainsi, $\boxed{\frac{3}{7} \text{ ne peut pas se décomposer en somme de deux fractions unitaires.}}$

$\square$