

Groupe dérivé

Samuel Rochetin

Mercredi 20 janvier 2016

Problème. *Le but de ce problème est d'introduire la notion de groupe dérivé d'un groupe G donné. Soit $(g, g') \in G^2$. On appelle commutateur de g et g' , et on note $[g, g']$ l'élément $gg'g^{-1}g'^{-1}$. On appelle groupe dérivé de G , et on note $D(G)$, le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des commutateurs.*

1. *Si G est abélien, que vaut tout commutateur ?*
2. *Montrer que $[g, g']^{-1} = [g', g]$.*
3. *Soit $g'' \in G$. Montrer que $g[g', g'']g^{-1} = [gg'g^{-1}, gg''g^{-1}]$.*
4. *Si G est abélien, déterminer $D(G)$.*
5. *Montrer que $D(G)$ est distingué dans G .*
6. *Montrer que $G/D(G)$ est abélien.*
7. *Soit H un sous-groupe distingué de G tel que G/H soit abélien. Montrer que $D(G) \subset H$.*
8. *Soit H un sous-groupe de G tel que $D(G) \subset H$. Montrer que H est distingué dans G et que G/H est abélien.*
9. *Soient G' un groupe et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme.*
 - a *Montrer que $f(D(G)) \subset D(G')$.*
 - b *Montrer que si f est surjectif, alors $f(D(G)) = D(G')$.*