Terminale S
Devoir de recherche

Samuel Rochetin

Lundi 25 février 2019

Résumé

Le but de ce devoir est de démontrer la célèbre inégalité arithmético-géométrique avec la méthode publiée en décembre 1960 dans *The American Mathematical Monthly* par Palahenedi Hewage Diananda, puis d'en donner un exemple d'application.

Problème. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n := \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ et $G_n := \sqrt[n]{a_1 \times \cdots \times a_n}$.*

1. *Montrer que $A_2 \geq G_2$.*
2. *Montrer que $A_2 = G_2$ si et seulement si $a_1 = a_2$.*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux entiers naturels α et β tels que $A_{n+1} = \dfrac{A_n + B_n}{2}$ et $B_n = \dfrac{\alpha A_{n+1} + \beta a_{n+1}}{n}$.*
4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
   (a) *Montrer que $A_n \geq G_n$.*
   (b) *Montrer que $A_n = G_n$ si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$.*
5. *Montrer que la suite $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.*

Solution.

1. Il s'agit d'utiliser une identité remarquable :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \\ \iff\ & a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geq 0 \\ \iff\ & \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \\ \iff\ & A_2 \geq G_2 \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} & A_2 = G_2 \\ \iff\ & (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = 0 \\ \iff\ & \sqrt{a_1} = \sqrt{a_2} \\ \iff\ & a_1 = a_2 \end{aligned}$$

3. Méthode directe :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&A_{n+1} = \frac{A_n + B_n}{2} \\
\iff\ & B_n = 2A_{n+1} - A_n \\
\iff\ & B_n = \frac{2(a_1 + \cdots + a_{n+1})}{n+1} - \frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} - a_{n+1}}{n} \\
\iff\ & B_n = \frac{(2n - (n+1))(a_1 + \cdots + a_{n+1}) + (n+1)a_{n+1}}{n(n+1)} \\
\iff\ & B_n = \frac{(n-1)\dfrac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} + \dfrac{n+1}{n+1}a_{n+1}}{n} \\
\iff\ & B_n = \frac{(n-1)A_{n+1} + a_{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha = n-1$ et $\beta = 1$ conviennent.
Méthode par identification :
S'il existe deux entiers naturels α et β tels que $A_{n+1} = \dfrac{A_n + B_n}{2}$ et $B_n = \dfrac{\alpha A_{n+1} + \beta a_{n+1}}{n}$, alors en égalant B_n dans ces deux expressions, il vient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha A_{n+1} + \beta a_{n+1}}{n} - 2A_{n+1} + A_n = 0 \\
\iff\ & (\alpha + 1 - n)(a_1 + \cdots + a_n) + (\alpha - 2n + (n+1)\beta)a_{n+1} = 0
\end{aligned}$$

Il suffit d'avoir $\alpha = n-1$ et $\beta = 1$ pour que cette égalité soit vraie.
On vérifie que $A_{n+1} = \dfrac{A_n + B_n}{2}$ et $B_n = \dfrac{(n-1)A_{n+1} + a_{n+1}}{n}$.

4. (a) Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_n \geq G_n$. En remarquant que B_n est une moyenne arithmétique de n réels positifs et que la fonction racine est croissante, il vient :

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= \frac{A_n + B_n}{2} && \text{question précédente} \\
&\geq \sqrt{A_n B_n} && \text{première question} \\
&\geq \sqrt{G_n B_n} && \text{hypothèse de récurrence} \\
&\geq \sqrt{G_n \sqrt[n]{A_{n+1}^{n-1} a_{n+1}}} && \text{hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

Par croissance des fonctions puissances et racine $(n+1)$-ième, il vient :

$$\begin{aligned}
&A_{n+1} \geq \sqrt{G_n \sqrt[n]{A_{n+1}^{n-1} a_{n+1}}} \\
\iff\ & A_{n+1}^{2n} \geq G_n^n A_{n+1}^{n-1} a_{n+1} \\
\iff\ & A_{n+1}^{n+1} \geq G_{n+1}^{n+1} \\
\iff\ & A_{n+1} \geq G_{n+1}
\end{aligned}$$

(b) Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_n = G_n$ si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$.
Si $a_1 = \cdots = a_{n+1}$, alors il est clair que $A_{n+1} = G_{n+1}$.
Réciproquement, si $A_{n+1} = G_{n+1}$, alors la première inégalité dans la démonstration de la question précédente est une égalité, ce qui permet d'utiliser la deuxième question :

$$\begin{aligned} \frac{A_n + B_n}{2} &= \sqrt{A_n B_n} \\ \iff A_n &= B_n \\ \iff \frac{2}{n+1}(a_1 + \cdots + a_n) - \frac{2n}{n+1}a_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

La deuxième inégalité dans la démonstration de la question précédente est aussi une égalité, ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} A_n &= G_n \\ \iff a_1 &= \ldots = a_n \\ \implies \frac{2n}{n+1}a_1 - \frac{2n}{n+1}a_{n+1} &= 0 \\ \iff a_1 &= a_{n+1} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} &= \sqrt[n+1]{1 \times \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &\leq \frac{1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Enfin, la fonction puissance $(n+1)$-ième est croissante.

$\square$

A SIMPLE PROOF OF THE ARITHMETIC MEAN, GEOMETRIC MEAN INEQUALITY

P. H. DIANANDA, University of Malaya in Singapore

The inequality in question is

$$A_n \equiv \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \geqq (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{1/n} \equiv G_n, \tag{1}$$

where the α_i are all positive. This is true for $n=2$. Assume its truth for $n=m$. Then $A_m \geqq G_m$. Also

$$A \equiv \frac{\alpha_{m+1} + (m-1)A_{m+1}}{m} \geqq \left(\alpha_{m+1} A_{m+1}^{m-1}\right)^{1/m} \equiv G.$$

Hence

$$A_{m+1} = \frac{A_m + A}{2} \geqq (A_m A)^{1/2} \geqq (G_m G)^{1/2} = \left(G_{m+1}^{m+1} A_{m+1}^{m-1}\right)^{1/2m},$$

and so $A_{m+1} \geqq G_{m+1}$. The inequality (1) follows by induction.

This proof, which is a modification of the celebrated Cauchy proof, may not be new; but I have not come across it anywhere.

FIGURE 1 – Facsimilé de l'article original