Intersection dénombrable d'ouverts bornés de $\mathbb{R}$

Samuel Rochetin

Mercredi 28 novembre 2018

Exercice. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b$.

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, a - \frac{1}{n} < x$. *Montrer que* $a \leq x$.
2. *En déduire que* $[a,b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[$.

Solution.

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x < a$, c'est-à-dire $0 < a - x$. $\mathbb{R}$ est archimédien donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, 1 < n_0(a-x)$, c'est-à-dire $x < a - \frac{1}{n_0}$. Contradiction. Donc $a \leq x$. Une autre façon de procéder consiste à montrer que $a = \sup A$, où $A \coloneqq \left\{a - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ puis de constater que x est un majorant de A : par définition de la borne supérieure comme le plus petit des majorants, $a \leq x$. Cependant, prouver que $a = \sup A$ revient à produire le même raisonnement par l'absurde.
2. Par symétrie du problème par rapport au milieu de $[a,b]$, nous obtenons de même : si $\forall n \in \mathbb{N}^*, x < b + \frac{1}{n}$, alors $x \leq b$. Ainsi, $x \in [a,b] \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[$, le sens direct de cette équivalence étant trivial, le sens indirect découlant de la question précédente. Or, par définition de l'intersection, $\forall n \in \mathbb{N}^*, x \in \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[\iff x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[$. D'où le résultat.

$\square$

Remarque. *Tout segment de* $\mathbb{R}$ *peut donc s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts bornés. Ce résultat est utile en théorie de la mesure, lors de la construction de la tribu de Borel.*