Interversion limite et intégrale

Samuel Rochetin

Samedi 12 mai 2018

Exercice 1. $\forall n \in \mathbb{N}, I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. *Étudier* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. Tout d'abord, $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^n}$ est continue sur $[0;1]$ donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Remarquons que $\forall n \geq 2$, le cours de Terminale ne permet pas de calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^n}$ donc il est inutile de chercher à expliciter I_n.

Notons que le calcul d'une telle primitive est accessible un an après le baccalauréat grâce à la fonction arctan, à la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles et à l'intégration par changement de variable.

Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n}\right)\mathrm{d}x && \text{linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{1+x^n-(1+x^{n+1})}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\,\mathrm{d}x && \text{mise au même dénominateur} \\
&= \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\,\mathrm{d}x && \text{factorisation} \\
&\geq 0 && \text{positivité de l'intégrale}
\end{aligned}$$

donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour appliquer la positivité de l'intégrale, nous avons utilisé le fait que $\forall x \in [0;1], \dfrac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} \geq 0$.

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1]$,

$$\begin{aligned}
& 0 \leq x^n \\
\iff & 1 \leq 1 + x^n \\
\iff & \frac{1}{1+x^n} \leq 1 && \text{décroissance de la fonction inverse et } \frac{1}{1} = 1 \\
\implies & \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 1\,\mathrm{d}x && \text{croissance de l'intégrale} \\
\iff & I_n \leq 1 && \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1
\end{aligned}$$

donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Ainsi, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
1 - I_n &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x && \text{vu précédemment} \\
&= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right)\mathrm{d}x && \text{linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x && \text{mise au même dénominateur}
\end{aligned}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1]$,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1+x^n} \leq 1 && \text{vu précédemment} \\
\iff & \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n && x^n \geq 0 \\
\implies & \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x && \text{croissance de l'intégrale} \\
\iff & 1 - I_n \leq \frac{1}{n+1} && \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.

Notons qu'il est possible d'obtenir cette limite par au moins deux autres méthodes :

1. Par intégration par parties, autrefois au programme de Terminale, désormais accessible un an après le baccalauréat.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], \frac{1}{1+x^n} = \frac{1+x^n-x^n}{1+x^n} = 1 - \frac{x}{n} \times \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$ donc en intégrant par parties, $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$. Or,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], 0 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln 2 \implies 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leq \ln 2$
donc le résultat suit.

2. Par le théorème de convergence dominée, accessible deux ans après le baccalauréat.
Posons $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], f_n(x) \coloneqq \dfrac{1}{1+x^n}$ et la fonction f valant 1 sur $[0;1[$ et $\dfrac{1}{2}$ en 1. Les trois hypothèses du théorème sont vérifiées sur $[0;1]$: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est intégrable et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], |f_n(x)| \ \leq 1$ avec $x \mapsto 1$ positive et intégrable. Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} I_n &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x && \text{théorème de convergence dominée} \\
&= \int_0^1 f(x) \\
&= 1 && \text{définition de l'intégrale de Riemann}
\end{aligned}$$

Notons que le théorème d'interversion limite et intégrale sous convergence uniforme ne peut s'appliquer ici car il n'y a pas convergence uniforme : en effet, f n'est pas continue en 1^-.

□