Méthode de Laplace

Samuel Rochetin

Dimanche 28 janvier 2018

Exercice. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

- *g possède un unique maximum absolu en x_0 distinct des bornes de I ;*
- *$\exists(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, g(x) - g(x_0) \sim -\alpha|x - x_0|^\beta$ en x_0 ;*
- *$f(x_0) \neq 0$;*
- *$\forall\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_I |f(x)| \mathrm{e}^{\lambda g(x)} \, \mathrm{d}x$ est convergente.*

Posons $\forall\lambda \in \mathbb{R}_+^*, F(\lambda) := \int_I f(x) \mathrm{e}^{\lambda g(x)} \, \mathrm{d}x$. Donner un équivalent de F en $+\infty$. Que devient cet équivalent si g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I ? Comment adapter la méthode au cas où x_0 est l'une des bornes de I ?

Solution. L'idée est d'isoler la contribution majeure de g en écrivant $F(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda g(x_0)} \int_I f(x) \mathrm{e}^{\lambda h(x)} \, \mathrm{d}x$, où $h(x) := g(x) - g(x_0)$.

Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\epsilon < 1$.

En remarquant que $h(x)$ et son équivalent sont négatifs, les deux premières conditions donnent $\exists\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*, |x - x_0| \leq \eta_1 \implies x \in I$ et $-(1+\epsilon)\alpha|x - x_0|^\beta \leq h(x) \leq -(1-\epsilon)\alpha|x - x_0|^\beta$, ce qui implique $\mathrm{e}^{-\lambda\epsilon\alpha|x-x_0|^\beta} \mathrm{e}^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\beta} \leq \mathrm{e}^{\lambda h(x)} \leq \mathrm{e}^{\lambda\epsilon\alpha|x-x_0|^\beta} \mathrm{e}^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\beta}$, par stricte positivité de λ et croissance de l'exponentielle. Quitte à considérer $-f$, supposons que $f(x_0) > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe un voisinage de x_0 sur lequel f reste strictement positive, c'est-à-dire $\exists\eta_2 \in \mathbb{R}_+^*, |x - x_0| \leq \eta_2 \implies f(x) > 0$. Donc $|x - x_0| \leq \min\{\eta_1; \eta_2\} \implies h_1(x) \mathrm{e}^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\beta} \leq f(x) \mathrm{e}^{\lambda h(x)} \leq h_2(x) \mathrm{e}^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\beta}$, où $h_1(x) = f(x) \mathrm{e}^{-\lambda\epsilon\alpha|x-x_0|^\beta}$ et $h_2(x) = f(x) \mathrm{e}^{\lambda\epsilon\alpha|x-x_0|^\beta}$. Or, h_1 et h_2 sont continues en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} h_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h_2(x) = f(x_0) \neq 0$, donc h_1 et h_2 sont équivalentes à $f(x_0)$ en x_0. Or, $f(x_0) > 0$ donc $\exists\eta_3 \in \mathbb{R}_+^*, |x - x_0| \leq \eta_3 \implies f(x_0)(1 - \epsilon) \leq h_1(x)$ et $h_2(x) \leq f(x_0)(1 + \epsilon)$. Posons $\eta := \min\{\eta_1; \eta_2; \eta_3\}$. Alors $|x - x_0| \leq \eta \implies f(x_0)(1 - \epsilon) \mathrm{e}^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\beta} \leq f(x) \mathrm{e}^{\lambda h(x)} \leq f(x_0)(1 + \epsilon) \mathrm{e}^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\beta} \implies f(x_0)(1-\epsilon) \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \mathrm{e}^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\beta} \, \mathrm{d}x \leq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x) \mathrm{e}^{\lambda h(x)} \, \mathrm{d}x \leq f(x_0)(1 + \epsilon) \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \mathrm{e}^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\beta} \, \mathrm{d}x$.

Notons que $\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \mathrm{e}^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\beta} \, \mathrm{d}x = 2 \int_{x_0}^{x_0+\eta} \mathrm{e}^{-\lambda\alpha(x-x_0)^\beta} \, \mathrm{d}x$ par symétrie par rapport à $x = x_0$ de la fonction à intégrer et de l'intervalle d'intégration. Le changement de variable $y := \lambda\alpha(x - x_0)^\beta$ donne $\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \mathrm{e}^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\beta} \, \mathrm{d}x = \dfrac{2}{\beta(\lambda\alpha)^{\frac{1}{\beta}}} \int_0^{\lambda\alpha\eta^\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} \mathrm{e}^{-y} \, \mathrm{d}y$. Nous avons $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\lambda\alpha\eta^\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} \mathrm{e}^{-y} \, \mathrm{d}y = \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)$ et

$\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \neq 0$ donc $\int_0^{\lambda\alpha\eta^\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1}\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \sim \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)$ en $+\infty$. Donc $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}_+^*, \lambda > \lambda_1 \implies (1-\epsilon)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \leq \int_0^{\lambda\alpha\eta^\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1}\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \leq (1+\epsilon)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)$. Or, $1-\epsilon > 0$ donc $|x-x_0| \leq \eta$ et $\lambda > \lambda_1$ impliquent l'encadrement suivant :

$$(1-\epsilon)^2 f(x_0)\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta(\lambda\alpha)^{\frac{1}{\beta}}} \leq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x \leq (1+\epsilon)^2 f(x_0)\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta(\lambda\alpha)^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Montrons que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_{I\setminus[x_0-\eta;x_0+\eta]} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x = 0$. D'une part, en écrivant $\lambda = \lambda-1+1$, l'inégalité triangulaire donne $\left|\int_{I\setminus[x_0-\eta;x_0+\eta]} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{I\setminus[x_0-\eta;x_0+\eta]} |f(x)|\,\mathrm{e}^{(\lambda-1)h(x)}\,\mathrm{e}^{h(x)}\,\mathrm{d}x$. D'autre part, nous pouvons ajuster η en fonction de I de sorte que l'ensemble $E := \{h(x), x \in I \setminus [x_0-\eta; x_0+\eta]\}$ soit une partie non vide de $\mathbb{R}$. Or, E est majoré par 0 donc E admet une borne supérieure notée M. Or, $0 \notin E$ par unicité du maximum global de g. Donc $M < 0$. Posons $M := -m$, avec $m > 0$. Ainsi, $h(x) \leq -m$ sur $I \setminus [x_0-\eta; x_0+\eta]$ donc $\forall \lambda > 1, \left|\int_{I\setminus[x_0-\eta;x_0+\eta]} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leq \mathrm{e}^{-(\lambda-1)m} \int_{I\setminus[x_0-\eta;x_0+\eta]} |f(x)|\,\mathrm{e}^{h(x)}\,\mathrm{d}x$. Or, la fonction à intégrer du membre de droite de cette inégalité est positive donc $\mathrm{e}^{-(\lambda-1)m} \int_{I\setminus[x_0-\eta;x_0+\eta]} |f(x)|\,\mathrm{e}^{h(x)}\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^{-(\lambda-1)m} \int_I |f(x)|\,\mathrm{e}^{h(x)}\,\mathrm{d}x$. La quatrième condition indique que $\int_I |f(x)|\,\mathrm{e}^{h(x)}\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}_+$ donc le théorème des gendarmes donne bien $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_{I\setminus[x_0-\eta;x_0+\eta]} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x = 0$ donc $\exists \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*, \lambda > \lambda_2 \implies$

$$-\epsilon f(x_0)\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta(\lambda\alpha)^{\frac{1}{\beta}}} \leq \int_{I\setminus[x_0-\eta;x_0+\eta]} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x \leq \epsilon f(x_0)\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta(\lambda\alpha)^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Posons $\Lambda := \max\{\lambda_1; \lambda_2\}$. Par somme des deux encadrements principaux, par non nullité du terme par lequel nous divisons et parce que $-3\epsilon-\epsilon^2 \leq -3\epsilon+\epsilon^2$, nous avons $\lambda > \Lambda \implies$

$$\left|\frac{F(\lambda)}{f(x_0)\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta(\lambda\alpha)^{\frac{1}{\beta}}}\,\mathrm{e}^{\lambda g(x_0)}} - 1\right| \leq 3\epsilon + \epsilon^2.$$

Or, $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} 3\epsilon+\epsilon^2 = 0$ donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*, 0 < \epsilon \leq \gamma \implies 0 < 3\epsilon+\epsilon^2 \leq \varepsilon$. Or, l'inégalité principale ci-dessus est valide $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \epsilon < 1$. En considérant $0 < \epsilon \leq \min\{\gamma; 1\}$, nous avons donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \Lambda \in \mathbb{R}_+^*, \lambda > \Lambda \implies \left|\frac{F(\lambda)}{f(x_0)\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta(\lambda\alpha)^{\frac{1}{\beta}}}\,\mathrm{e}^{\lambda g(x_0)}} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, $\boxed{F(\lambda) \sim f(x_0) \dfrac{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta(\lambda\alpha)^{\frac{1}{\beta}}} \mathrm{e}^{\lambda g(x_0)} \text{ en } +\infty.}$

Si g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, alors la formule de Taylor donne $g(x) - g(x_0) \sim g''(x_0)\dfrac{(x-x_0)^2}{2}$ en x_0 car $g'(x_0) = 0$. Notons que $g''(x_0) < 0$ par définition de x_0 comme maximum local. Or, $(x-x_0)^2 = |x-x_0|^2$ donc $\alpha = -\dfrac{g''(x_0)}{2}$ et $\beta = 2$. Or, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Dans ce cas, $\boxed{F(\lambda) \sim f(x_0)\sqrt{\dfrac{2\pi}{\lambda|g''(x_0)|}} \mathrm{e}^{\lambda g(x_0)}}$ en $+\infty$.

Si x_0 est la borne droite de I sans perte de généralité, alors on est amené à calculer $\int_{x_0-\eta}^{x_0} \mathrm{e}^{-\lambda\alpha(x_0-x)^\beta} \, \mathrm{d}x$ au lieu de $\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \mathrm{e}^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\beta} \, \mathrm{d}x$: l'équivalent obtenu est donc simplement $\boxed{\text{la moitié du premier équivalent.}}$ Cependant, dans ce cas, le deuxième équivalent n'est pas toujours valable : x_0 n'est pas nécessairement maximum absolu de g sur un intervalle contenant I donc on peut avoir $g''(x_0) = 0$ ou $g'(x_0) \neq 0$. Dans ce dernier cas, on obtient $\beta = 1$ et on se tourne vers le premier équivalent.

Dans tous les cas, en pratique, mieux vaut commencer par déterminer les variations de g et le premier terme non nul du développement limité de $g(x) - g(x_0)$ afin de déterminer α, β. $\square$