Étude de la suite de terme général $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Samuel Rochetin

Lundi 18 février 2019

Résumé

Le but de ce document est d'étudier la suite $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de façon élémentaire, c'est-à-dire en se passant du logarithme népérien et de la notion de dérivation. Le terme général de la suite sera noté u_n.

1 Monotonie

Proposition 1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.*

Démonstration. L'inégalité arithmético-géométrique permet de prouver la croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cette inégalité ne repose pas nécessairement sur la concavité du logarithme népérien : il en existe plusieurs démonstrations élémentaires, dont une d'Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt[n+1]{u_n} &= \sqrt[n+1]{1\times\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &\leq \frac{1+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\\ &= 1+\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

La croissance de la fonction puissance $(n+1)$-ième permet de conclure. □

2 Majoration

2.1 Définition de e

Proposition 2. *La suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Démonstration. Cette suite est croissante comme suite des sommes partielles d'une série à termes positifs.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &\leq 3\end{aligned}$$

Ainsi, cette suite est également majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. □

Définition 1. *Notons* $\mathrm{e} \coloneqq \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

2.2 Majoration de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Proposition 3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est majorée.*

Démonstration. La formule du binôme de Newton permet d'établir un lien entre u_n et e.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leq \mathrm{e}\end{aligned}$$

□

3 Limite

Proposition 4. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{e}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé.

Par définition de la limite, par croissance de la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'après la définition 1, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \implies \mathrm{e} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

En outre, $\forall k \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{k!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n} = \frac{1}{k!}$, la limite étant obtenue en croissant. Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_1(k) \in \mathbb{N}^*, n \geq n_1(k) \implies \frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{\varepsilon}{3(n_0+1)}$. Posons $n_1 \coloneqq \max\{n_1(k), k \in [\![0; n_0]\!]\}$. Ainsi, $n \geq n_1 \implies \sum\limits_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0+1, \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &\leq \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leq \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Posons $N := \max(n_0+1, n_1)$. N ne dépend que de ε. On a :

$$\begin{aligned}\forall n \geq N, \mathrm{e} - u_n &= \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

□