Introduction à la logique

Samuel Rochetin

Mercredi 6 juin 2018

Résumé

Le but de ce document est de présenter quelques rudiments de logique formulés pour les collégiens.

1 Proposition logique

Définition 1. *On appelle **proposition logique** ou **proposition** toute affirmation vraie ou fausse.*

Exemple 1. *« Il y a sept jours dans une semaine. » est une proposition vraie.*

Exemple 2. *« Il y a onze mois dans une année. » est une proposition fausse.*

Exemple 3. *« Les enfants, venez manger. » n'est pas une proposition car ce n'est pas une affirmation : ce n'est ni vrai, ni faux.*

2 Négation d'une proposition logique

Définition 2. *Soit P une proposition. On appelle **négation** de P, on note $\neg P$ et on lit « non P » la proposition vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.*

Exemple 4. *Soit P la proposition « J'aime la couleur jaune. ». Sa négation $\neg P$ est la proposition « Je n'aime pas la couleur jaune. ».*

Exemple 5. *Soit Q la proposition « Le verre n'est pas plein. ». Sa négation $\neg Q$ est la proposition « Le verre est plein. ».*

3 Implication logique

Définition 3. *Soient P, Q deux propositions. On appelle **implication logique** ou **implication** et on note $P \implies Q$ la proposition se lisant « si P, alors Q ».*

Exemple 6. *Soient P la proposition « Je suis français. », Q la proposition « Je suis européen. ». L'implication $P \implies Q$ est la proposition « Si je suis français, alors je suis européen ». Cette implication est vraie.*

Exemple 7. *Soient P la proposition « Je suis canadien. », Q la proposition « Je suis européen. ». L'implication $P \implies Q$ est la proposition « Si je suis canadien, alors je suis européen ». Cette implication est fausse.*

4 Implication réciproque

Définition 4. *Soient P, Q deux propositions. On appelle **implication réciproque** ou **réciproque** de l'implication $P \implies Q$ l'implication $Q \implies P$.*

Exemple 8. *Soient P la proposition « Je choisis un entier naturel strictement compris entre 1 et 4. », Q la proposition « Je choisis le nombre 2 ou le nombre 3. ». L'implication $P \implies Q$ est la proposition « Si je choisis un entier naturel strictement compris entre 1 et 4, alors je choisis le nombre 2 ou le nombre 3. ». Cette implication est vraie. Sa réciproque $Q \implies P$ est la proposition « Si je choisis le nombre 2 ou le nombre 3, alors je choisis un entier naturel strictement compris entre 1 et 4. ». Cette réciproque est vraie.*

Remarque 1. *$P \implies Q$ peut être vraie sans que $Q \implies P$ ne le soit.*

Exemple 9. *Soient P la proposition « Je suis français. », Q la proposition « Je suis européen. ». L'implication $P \implies Q$ est vraie. Sa réciproque $Q \implies P$ est la proposition « Si je suis européen, alors je suis français. ». Cette réciproque est fausse : si je suis européen, alors je ne suis pas nécessairement français, je peux être italien, par exemple.*

5 Équivalence logique

Définition 5. *Soient P, Q deux propositions. On dit que P, Q sont **logiquement équivalentes** ou **équivalentes**, on note $P \iff Q$ et on lit « P si et seulement si Q » si $P \implies Q$ et $Q \implies P$ sont vraies.*

Exemple 10. *Les deux propositions de 8 sont équivalentes. « Je choisis un entier naturel strictement compris entre 1 et 4 si et seulement si je choisis le nombre 2 ou le nombre 3. ».*

Exemple 11. *Si $10 = 9+1$, alors $10-1 = 9$. Réciproquement, si $10-1 = 9$, alors $10 = 9+1$. Ainsi, $10 = 9+1$ si et seulement si $10-1 = 9$.*

Remarque 2. *On peut abréger « si et seulement si » en « ssi ».*

6 Proposition contraposée

Définition 6. *Soient P, Q deux propositions. On appelle **proposition contraposée** ou **contraposée** de l'implication $P \implies Q$ l'implication $\neg Q \implies \neg P$.*

Exemple 12. *La contraposée de l'implication de 6 est « Si je ne suis pas européen, alors je ne suis pas français. ». Cette contraposée est vraie.*

Exemple 13. *La contraposée de l'implication de 7 est « Si je ne suis pas européen, alors je ne suis pas canadien. ». Cette contraposée est fausse : si je ne suis pas européen, alors je peux être canadien.*

Les deux derniers exemples nous permettent de formuler la proposition suivante.

Proposition 1. *Une implication et sa contraposée sont équivalentes.*

Démonstration (hors programme). Soient P, Q deux propositions. Dressons les tables de vérité de $P \implies Q$ et $\neg Q \implies \neg P$.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \implies Q$	$\neg Q \implies \neg P$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

$\square$