Première S
Devoir de recherche

Samuel Rochetin

Lundi 4 novembre 2013

Résumé

Le but de ce devoir est de déterminer le maximum d'une fonction rationnelle sans faire appel à la notion de dérivation.

Problème. *Soit f la fonction définie par* $f(x) = \dfrac{-5x+1}{2x^2+x+1}$.

1. *Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.*
2. *En traçant la courbe représentative de f sur une calculatrice, expliquer la conjecture :* $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) < 4$.
3. *Démontrer cette conjecture.*
4. *On admet l'existence d'un maximum M de f inférieur à* 4.
   (a) *Calculer* $f(0)$.
   (b) *En déduire que* $1 \leq M$.
   (c) *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}, 2Mx^2 + (M+5)x + M - 1 \geq 0$.
   (d) *En déduire que* $-7M^2 + 18M + 25 \leq 0$.
   (e) *En déduire que* $M \in \left[\dfrac{25}{7}; 4\right[$.
   (f) *Montrer que* $M \in \left]\dfrac{25}{7}; 4\right[\implies \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < M$.
   (g) $\dfrac{25}{7}$ *admet-il un antécédent par f ?*
   (h) *Conclure.*

Solution. 1. Le dénominateur est un polynôme du second degré de discriminant négatif donc ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (il est positif, ce qui est utilisé dans certaines des questions suivantes).

2. La courbe représentative de f semble comprise entre les deux droites horizontales d'équations $y = -1$ et $y = 4$.
3. Exercice classique.
4. (a) $f(0) = 1$.
   (b) M est le maximum de f donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$. En particulier, pour $x = 0$, on a $f(0) \leq M$, c'est-à-dire $1 \leq M$.
   (c) Résultat équivalent à $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.

(d) Le polynôme du second degré en x de la question précédente est positif ou nul sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant est négatif ou nul.

(e) Étude du signe du polynôme du second degré en M de la question précédente et $1 \leq M$.

(f) $\forall M \in \left]\frac{25}{7}; 4\right[, -7M^2 + 18M + 25 < 0$. Dans ce cas, $\forall x \in \mathbb{R}, 2Mx^2 + (M+5)x + M - 1 > 0$, c'est-à-dire $f(x) < M$.

(g) Exercice classique. Oui : $-\frac{3}{5}$.

(h) Si $M = \frac{25}{7}$, alors $-7M^2+18M+25 = 0$ donc l'équation $2Mx^2+(M+5)x+M-1 = 0$ d'inconnue x admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'équation $f(x) = M$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, $x = -\frac{3}{5}$. Or, ayant raisonné par équivalences, on a $M \in \left[\frac{25}{7}; 4\right[\implies \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$. En particulier, $M = \frac{25}{7} \implies \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$. Ainsi, M est un majorant de f qui admet un antécédent par f, c'est donc le maximum de f.

$\square$