6 divise $n(n+1)(2n+1)$

Samuel Rochetin

Mercredi 3 février 2016

Résumé

L'exercice suivant est classique : « montrer que pour tout entier naturel n, 6 divise $n(n+1)(2n+1)$ ». Le but de ce document est de présenter trois preuves.

1 Par récurrence

1.1 Première méthode

La somme des $n+1$ premiers carrés d'entiers naturels consécutifs est un résultat connu qui peut se démontrer par récurrence : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(2n+1) = 6 \times \sum_{k=0}^{n} k^2$. Or, $\sum_{k=0}^{n} k^2$ est un entier naturel, donc 6 divise $n(n+1)(2n+1)$.

1.2 Deuxième méthode

Par récurrence sur n. La propriété est vraie au rang 0 car 6 divise 0. Supposons qu'il existe un rang $p > 0$ tel que 6 divise $p(p+1)(2p+1)$. Montrons que 6 divise alors $(p+1)(p+2)(2p+3)$. Il suffit pour cela de montrer que 6 divise la différence $(p+1)(p+2)(2p+3) - p(p+1)(2p+1)$. Or, après factorisation par $(p+1)$ et simplification, il vient $(p+1)(p+2)(2p+3) - p(p+1)(2p+1) = 6(p+1)^2$. 6 divise $p(p+1)(2p+1)$ par hypothèse de récurrence, et 6 divise $6(p+1)^2$, donc 6 divise $(p+1)(p+2)(2p+3)$. La propriété est vraie au rang $p+1$, l'hérédité est prouvée. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 6$ divise $n(n+1)(2n+1)$.

2 Par le corollaire du théorème de Gauss

n et $n+1$ sont deux entiers consécutifs, donc d'après le principe des tiroirs, l'un d'entre eux est pair, donc 2 divise $n(n+1)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 2$ divise $n(n+1)(2n+1)$. Dressons la table des congruences modulo 3 :

n	0	1	2
$n+1$	1	2	0
$2n+1$	1	0	2
$n(n+1)(2n+1)$	0	0	0

La dernière ligne, obtenue par produit des trois premières, montre que $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod 3$, c'est-à-dire 3 divise $n(n+1)(2n+1)$. Nous pouvons appliquer le corollaire du théorème de Gauss : $\forall n \in \mathbb{N}, 2$ et 3 divisent $n(n+1)(2n+1)$. Or, 2 et 3 sont premiers entre eux, donc leur produit, 6, divise $n(n+1)(2n+1)$.