Khôlle d'analyse

Samuel Rochetin

Lundi 29 janvier 2018

Exercice. *Soit* $E := \left\{ \dfrac{\|(x,y)\|_1}{\|(x,y)\|_\infty}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}$.

1. *Montrer que la norme 1 et la norme infinie sont équivalentes.*
2. *En déduire que E admet une borne supérieure et une borne inférieure.*
3. *E admet-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ?*

Solution.

1. Montrons que $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \alpha \|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_1$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\} \leq |x| + |y| = \|(x,y)\|_1$ donc $\alpha = 1$ convient.

   Montrons que $\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\|_1 \leq \beta \|(x,y)\|_\infty$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y| \leq 2\max\{|x|,|y|\} = 2\|(x,y)\|_\infty$ donc $\beta = 2$ convient.

   Donc $\exists (\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \alpha \|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_1 \leq \beta \|(x,y)\|_\infty$. Autrement dit, la norme 1 et la norme infinie sont équivalentes.

2. D'après la question précédente, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_1 \leq 2\|(x,y)\|_\infty$. En particulier, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, 1 \leq \dfrac{\|(x,y)\|_1}{\|(x,y)\|_\infty} \leq 2$. Donc E est une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ donc E admet une borne supérieure notée $\sup E$ et une borne inférieure notée $\inf E$.

3. $\sup E$ est le plus petit majorant de E donc $\sup E \leq 2$. Or, $E \ni \dfrac{\|(1,1)\|_1}{\|(1,1)\|_\infty} = \dfrac{1+1}{1} = 2$ donc $\sup E \geq 2$ (en effet, 2 est un élément de E donc 2 est majoré par $\sup E$). Au final, $\sup E \leq 2$ et $\sup E \geq 2$ donc $\sup E = 2$ et 2 est le plus grand élément de E.

   De même, $\inf E$ est le plus grand minorant de E donc $\inf E \geq 1$. Or, $E \ni \dfrac{\|(0,1)\|_1}{\|(0,1)\|_\infty} = \dfrac{0+1}{1} = 1$ donc $\inf E \leq 1$ (en effet, 1 est un élément de E donc 1 est minoré par $\inf E$). Au final, $\inf E \geq 1$ et $\inf E \leq 1$ donc $\inf E = 1$ et 1 est le plus petit élément de E.

□