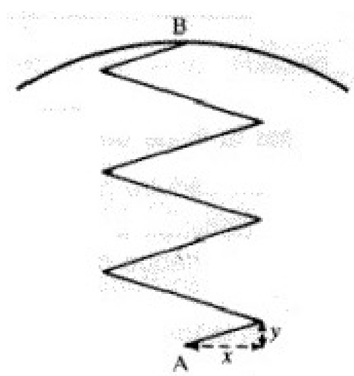
Optimisation

Samuel Rochetin

Mercredi 28 octobre 2015

Énoncé. *Un skieur de randonnée gravit une montagne dont la pente est supposée régulière. Il fait des virages réguliers pour aller du point de départ A au sommet B distant de 1000 mètres à vol d'oiseau. L'inclinaison de ses virages est* $p = \dfrac{y}{x}$*, où* x *et* y *sont les distances indiquées sur la figure. Une règle empirique fait apparaître que la vitesse du skieur est inversement proportionnelle à* $p + \dfrac{1}{8}$*. Quelle est la valeur de* p *qui permet de gravir la montagne en un temps minimal ?*



Solution. Si p augmente, alors la vitesse diminue : cela se conçoit physiquement puisque le skieur doit affronter une pente plus importante.

Lorsque p est fixé, le parcours compte $r(p)$ segments. Chaque segment du parcours a pour longueur $l_i = \sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2}$. L'inclinaison des virages est constante donc $\frac{y_i}{x_i} = p$, et comme $y_i \geq 0$, il vient $l_i = y_i\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}$. On a donc $l_{tot}(p) = \sum_{i=1}^{r(p)} l_i = \sum_{i=1}^{r(p)} y_i\sqrt{1+\frac{1}{p^2}} = 1000\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}$ car d'après l'énoncé, $\sum_{i=1}^{r(p)} y_i = 1000$.

Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{8}\}, v(p) = \frac{k}{p+\frac{1}{8}}$.

La vitesse du skieur étant supposée constante, le temps de parcours est donné par

$$t(p) = \frac{l_{tot}(p)}{v(p)} = \frac{1000}{k}\left(p+\frac{1}{8}\right)\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}.$$

Une étude de fonction classique montre que t est minimale pour $p = \frac{1}{2}$. $\square$